# 《组合数学》(邵嘉裕)习题


王旭[*]

学号：2016211304


October 17, 2016

## 1 排列、组合和二项式系数

1. 先从圆周上随便选一个点作为起点开始，确定一个首尾关系，则从 $n$ 个不同元素中取出 $r$ 进行排列，为 $\mathrm{P}_n^r$ ，又圆周上的这 $r$ 个点都有可能为起点，则重复了 $r$ 次，故最后的结果为 $\dfrac{\mathrm{P}_n^r}{r}$ .

2. (1) 令 $y_i = x_i - a_i\ (i = 1,2,\cdots,n)$ ，则 $y_i \geq 0\ (i = 1,2,\cdots,n)$ ，且 $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - a_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = r - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ ，令 $a = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ ，得

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = r - a \tag{1}$$

根据引理1.2.1和定理1.2.1即得 (1) 的非负整数解的个数为 $\binom{n+r-a-1}{r-a} = \binom{n+r-a-1}{n-1}$ ，这也是原方程的非负整数解的个数.

(2) 由于 $x_i\ (i = 1,2,3,4)$ 均要非负，且 $\sum\limits_{i=1}^{4} x_i = 6$ ，则 $0 \leq x_i \leq 6\ (i = 1,2,3,4)$ ，即对 $x_i\ (i = 1,2,3,4)$ 附加的限制条件无用，故根据引理1.2.1和定理1.2.1知答案即为 $\binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6} = \binom{9}{3} = 84$ .

3. (1) 令集合 $S = \left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \middle| \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leq r,\ x_i \in \mathbb{N}\ (i = 1,2,\cdots,n)\right\}$ ，$S_j = \left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \middle| \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = j,\ x_i \in \mathbb{N}\ (i = 1,2,\cdots,n)\right\}\ (j = 0,1,2,\cdots,r)$ . (则 $S = \bigcup\limits_{j=0}^{r} S_j$ 且 $S_j \cap S_k = \emptyset\ (j \neq k)$ ，即 $|S| = \sum\limits_{j=0}^{r} |S_j|$ ，又 $|S|$ 即为所求之个数，$|S_j|\ (j = 0,1,2,\cdots,r)$ 为方程 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = j\ (j = 0,1,2,\cdots,r)$ 的非负整数解的个数 $\binom{n+j-1}{j} = \binom{n+j-1}{n-1}$ .) $|S| = \sum\limits_{j=0}^{r} \binom{n+j-1}{j}$ .

(2) 先考虑 $\triangle AOB$ 中的整点个数，实际上就是 $x + y \leq a$ 的非负整数解的个数，由上题得此结果为 $\sum\limits_{j=0}^{a} \binom{2+j-1}{j} = \sum\limits_{j=0}^{a} (j+1) = \dfrac{(a+1)(a+2)}{2}$ . 又不包括原点的 $OA$ 上有 $a$ 个整点，所以总的整点个数为

$$4 \times \frac{(a+1)(a+2)}{2} - 4a - 3 = 2a^2 + 2a + 1.$$

4. (1) 这是一个可重复的排列，5 个位置上每个都有 26 种可能，故结果为 $26^5$ .


[*]Email: wangxuac@163.com

(2) 由于 4+3+2+3=12，则这是 4 元集合 $\{a,b,c,d\}$ 的 $(4,3,2,3)$-重复排列，故个数为 $\dfrac{12!}{4!3!2!3!}$.

5. (1) 这是一个可重复的组合，设每种糕点的数量分别为 $x_j$，则 $\sum\limits_{j=1}^{10}=15$ 的非负整数解的个数 $\dbinom{10+15-1}{15}=\dbinom{24}{9}$ 即为所求.

(2) i. 由于这四种中每一种都可以取够 10 个，总的取法为 $\dbinom{4+10-1}{10}=\dbinom{13}{3}=260$.

ii. 由于这四种中任何一种都不够 101 个，故先认为都足够，有 $\dbinom{4+101-1}{101}=\dbinom{104}{3}$ 种取法，其中只取一个色的有 4 种，而这也是不能出现的 4 种，故结果为 $\dbinom{104}{3}-4$.

6. (1) 由于 $p$ 为素数，则 $(i,p)=1\ (i=1,2,\cdots,p-1)$，又 $i=1,2,\cdots,p-1$ 时 $\dfrac{1}{p}\dbinom{p}{i}=\dfrac{(p-1)\cdots(p-i+1)}{i!}\in\mathbb{N}^*$ (否则，则 $\exists j\in\{1,2,\cdots,i\}$, s.t. $j\,|\,p$). 即 $\dbinom{p}{i}\equiv 0(\bmod p)$.

(2) $(a+b)^p-a^p-b^p=\sum\limits_{i=0}^{p}\dbinom{p}{i}a^ib^{p-i}-a^p-b^p=\sum\limits_{i=1}^{p-1}\dbinom{p}{i}a^ib^{p-i}$. 有上题知 $p\,|\,\dbinom{p}{i}\ (i=1,2,\cdots,p-1)$，则 $p\,|\sum\limits_{i=1}^{p-1}\dbinom{p}{i}a^ib^{p-i}$，即 $(a+b)^p\equiv a^p+b^p(\bmod p)$.

7. $2^n\cdot\prod\limits_{k=1}^{n}(2k-1)=2^n\cdot(2n-1)!!=2^n\cdot\dfrac{(2n)!}{(2n)!!}=2^n\cdot\dfrac{(2n)!}{2^nn!}=\dfrac{(2n)!}{n!}$.

8. 可用数学归纳法，此处参考杨辉三角直接证明.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n}{k}&=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^k\binom{n}{k}\\
&=-\binom{n-1}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^k\binom{n}{k}\\
&=\binom{n-1}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^k\binom{n}{k}\\
&\cdots\cdots\\
&=(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}+(-1)^k\binom{n}{k}\\
&=(-1)^k\left(-\binom{n-1}{k-1}+\binom{n}{k}\right)\\
&=(-1)^k\binom{n-1}{k}.
\end{aligned}$$

9. (1) 参考杨辉三角，得：

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{r}=\sum_{k=r}^{n}\binom{k}{r}&=\binom{r}{r}+\binom{r+1}{r}+\cdots+\binom{n}{r}\\
&=\binom{r+1}{r+1}+\binom{r+1}{r}+\cdots+\binom{n}{r}\\
&=\binom{r+2}{r+1}+\binom{r+2}{r}+\cdots+\binom{n}{r}\\
&\cdots\cdots\\
&=\binom{n-1}{r+1}+\binom{n-1}{r}+\binom{n}{r}\\
&=\binom{n}{r+1}+\binom{n}{r}=\binom{n+1}{r+1}
\end{aligned}$$

(2) 由 $\binom{k-i}{r-i}=\binom{k-i}{k-r}$，且令 $j=k-i\in\{k-r,k-r+1,\cdots,k\}$，利用上题得

$$\sum_{i=0}^{r}\binom{k-i}{r-i}=\sum_{i=0}^{r}\binom{k-i}{k-r}=\sum_{j=k-r}^{k}\binom{j}{k-r}=\sum_{j=0}^{k}\binom{j}{k-r}=\binom{k+1}{k-r+1}=\binom{k+1}{r}.$$

10. (1)

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{n}m^2=\sum_{m=0}^{n}m^2&=\sum_{m=0}^{n}\left(2\binom{m}{2}+\binom{m}{1}\right)\\&=2\sum_{m=0}^{n}\binom{m}{2}+\sum_{m=0}^{n}\binom{m}{1}\\&=2\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}\\&=2\frac{(n+1)n(n-1)}{3!}+\frac{(n+1)n}{2!}\\&=n(n+1)\left(\frac{n-1}{3}+\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

(2) 由于

$$\begin{aligned}m^3&=m^2(m-1)+m^2\\&=m(m-1)(m-2)+2m(m-1)+m(m-1)+m\\&=6\binom{m}{3}+3m(m-1)+m\\&=6\binom{m}{3}+6\binom{m}{2}+\binom{m}{1},\end{aligned}$$

所以 $a=b=6,c=1$ .

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{n}m^3=\sum_{m=0}^{n}m^3&=\sum_{m=0}^{n}\left(6\binom{m}{3}+6\binom{m}{2}+\binom{m}{1}\right)\\&=6\sum_{m=0}^{n}\binom{m}{3}+6\sum_{m=0}^{n}\binom{m}{2}+\sum_{m=0}^{n}\binom{m}{1}\\&=6\binom{n+1}{4}+6\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}\\&=6\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4!}+6\frac{(n+1)n(n-1)}{3!}+\frac{(n+1)n}{2!}\\&=(n+1)n\left(\frac{(n-1)(n-2)}{4}+(n-1)+\frac{1}{2}\right)\\&=(n+1)n\frac{(n-1)(n-2)+4(n-1)+2}{4}\\&=(n+1)n\frac{n^2+n}{4}=\frac{(n+1)^2n^2}{4}.\end{aligned}$$

由于 $\binom{n}{m}\binom{m}{k}=\frac{n!}{m!(n-m)!}\frac{m!}{k!(m-k)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-k)!}{(n-m)!(m-k)!}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$，且

$$\sum_{m=0}^{n}\binom{n-k}{m-k}=\sum_{m=k}^{n}\binom{n-k}{m-k}=2^{n-k}.$$

则

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}m^3&=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\left(6\binom{m}{3}+6\binom{m}{2}+\binom{m}{1}\right)\\
&=6\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\binom{m}{3}+6\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\binom{m}{2}+\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\binom{m}{1}\\
&=6\sum_{m=3}^{n}\binom{n}{3}\binom{n-3}{m-3}+6\sum_{m=2}^{n}\binom{n}{2}\binom{n-2}{m-2}+\sum_{m=1}^{n}\binom{n}{1}\binom{n-1}{m-1}\\
&=6\binom{n}{3}\sum_{m=3}^{n}\binom{n-3}{m-3}+6\binom{n}{2}\sum_{m=2}^{n}\binom{n-2}{m-2}+\binom{n}{1}\sum_{m=1}^{n}\binom{n-1}{m-1}\\
&=6\binom{n}{3}2^{n-3}+6\binom{n}{2}2^{n-2}+\binom{n}{1}2^{n-1}\\
&=2^{n-3}(n(n-1)(n-2)+6n(n-1)+4n)\\
&=2^{n-3}n(n^2+3n-4+4)\\
&=2^{n-3}n^2(n+3).
\end{aligned}$$

11. (1) 这是有序划分问题，答案为 $\dfrac{52!}{(13!)^4}$ .
   (2) 这是有序划分问题，答案为 $\dfrac{50!}{(10!)^2(15!)^2}$ .
   (3) 这是无序划分问题，答案为 $\dfrac{50!}{(10!)^2(15!)^2 2!2!}$ .
12. (1) 对于 $\forall x\in X$ ，对应到 $Y$ 的元素均为 $k$ 种选择，故总的为 $k^n$ .
   (2) 不妨设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ ，则 $x_1$ 对应到 $Y$ 有 $k$ 种选择； $x_2$ 对应到 $Y$ 有 $k-1$ 种选择；以此类推，实际上这是一个排列问题，即 $\mathrm{A}_k^n$ .
13. (1) 对于从 $X$ 到 $Y$ 的映射，可以按照 $Y$ 中使用到的元素个数分别考虑：不使用 $Y$ 中的元素的映射个数为 $\binom{k}{0}g(n,0)=0$，使用一个元素的映射个数为 $\binom{k}{1}g(n,1)$；使用两个元素的映射个数为 $\binom{k}{2}g(n,2)$； $\cdots$； 使用全部 $k$ 个元素的映射个数为 $\binom{k}{k}g(n,k)$. 把这些加起来就得到总的的映射数 $k^n$ ，即 $k^n=\sum\limits_{i=0}^{k}\binom{k}{i}g(n,i)$ .
   (2) 在**定理** 1.4.6 (1) 中取 $a_i=i^n$, $b_i=g(n,i)$ $(i=1,2,\cdots,k)$，即得 $g(n,k)=\sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}i^n$.
14. (1) 在 $k$ 个不同元素中允许重复取 $n$ 个，且每个元素至少取一次，实际上即为从 $n$ 元集到 $k$ 元集的满射的个数，由上题知此值为 $g(n,k)=k!S(n,k)$.
   (2) 由于 $S(n,k)(x)_i=\dfrac{(x)_i}{i!}g(n,k)=\binom{x}{i}g(n,k)$，由上题知 $x^n=\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{x}{i}g(n,i)$.
15. (1) 类似 14(1)，这实际上即为从 $n$ 元集到 $k$ 元集的满射的个数，由上题知此值为 $g(n,k)=k!S(n,k)$.
   (2) 由于有序划分时，$k$ 份之间具有顺序，所以对于无序划分的结果即为 $\dfrac{g(n,k)}{k!}=S(n,k)$.
   (3) $n$ 个相同元素有序划分为 $k$ 份，相当于在 $n$ 个元素的 $n-1$ 个空挡位置放入 $k-1$ 个挡板即可分开，故结果为 $\binom{n-1}{k-1}$.
   (4) 由于无序划分，不妨就把划分按照从小到大的顺序排列，包含 $i$ 个元素的划分数为 $x_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则每一份划分占用的元素为 $ix_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$，故 $\sum\limits_{i=1}^{n}ix_i=n$；又份数为 $k$，即得 $\sum\limits_{i=1}^{n}=k$.

16. (1) 利用**题** 9(1), 13(1) 以及 $S(n,k)$ 的定义得

$$\sum_{m=1}^{n} m^k = \sum_{m=1}^{n}\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}g(k,i) = \sum_{i=0}^{m}g(k,i)\sum_{m=1}^{n}\binom{m}{i} = \sum_{i=0}^{m}g(k,i)\binom{m+1}{i+1} = \sum_{i=0}^{k}\binom{m+1}{i+1}i!S(k,i).$$

(2) 利用**定理** 1.4.4(1)(2), **题** 9(1), 13(1) 以及 $S(n,k)$ 的定义得

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{n}\binom{n}{m}m^k &= \sum_{m=1}^{n}\binom{n}{m}\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}g(k,i)\\
&= \sum_{i=0}^{m}g(k,i)\sum_{m=1}^{n}\binom{n}{m}\binom{m}{i}\\
&= \sum_{i=0}^{m}g(k,i)\sum_{m=1}^{n}\binom{n}{i}\binom{n-i}{m-i}\\
&= \sum_{i=0}^{m}g(k,i)\binom{n}{i}\sum_{m=1}^{n}\binom{n-i}{m-i}\\
&= \sum_{i=0}^{m}g(k,i)\binom{n}{i}2^{n-i}\\
&= \sum_{i=0}^{m}i!S(k,i)\binom{n}{i}2^{n-i}\\
&= \sum_{i=0}^{k}i!S(k,i)\binom{n}{i}2^{n-i}.
\end{aligned}$$

特别地，$k=2,3$ 时

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{n}m^2 = \binom{m+1}{2}S(2,1)+\binom{m+1}{3}2S(2,2) = \binom{m+1}{2}+2\binom{m+1}{3},\\
&\sum_{m=1}^{n}m^3 = \binom{m+1}{2}S(3,1)+\binom{m+1}{3}2S(3,2)+\binom{m+1}{4}6S(3,3) = \binom{m+1}{2}+6\binom{m+1}{3}+6\binom{m+1}{4},\\
&\sum_{m=1}^{n}\binom{n}{m}m^2 = 2^{n-2}\left(2S(2,1)\binom{n}{1}+2S(2,2)\binom{n}{2}\right) = 2^{n-1}\left(\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right) = 2^{n-1}\binom{n+1}{2},\\
&\sum_{m=1}^{n}\binom{n}{m}m^3 = 2^{n-3}\left(4S(3,1)\binom{n}{1}+2\times 2S(3,2)\binom{n}{2}+6S(3,3)\binom{n}{3}\right) = 2^{n-2}\left(2\binom{n}{1}+6\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}\right).
\end{aligned}$$

17. (1) 由于 $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{1}{n+1}\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$，则

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+1}{j} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1).$$

(2) 利用上题得

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{j-1}\binom{n+1}{j} = \frac{0-(-1)}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

(3) 用数学归纳法.

$n=1$ 时显然成立；

假设 $n-1$ 时结论成立，即 $\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}\dbinom{n-1}{k}=\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{1}{i}$，利用 $\dbinom{n}{k}=\dbinom{n-1}{k}+\dbinom{n-1}{k-1}$ 得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k}&=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k}+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\binom{n}{n}\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right)+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\\&=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n-1}{k-1}.\end{aligned}$$

再利用题17(2) 得

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n-1}{k-1}=\sum_{j=0}^{n-2}\frac{(-1)^{j}}{j+1}\binom{n-1}{j}=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^{j}}{j+1}\binom{n-1}{j}-\frac{(-1)^{n-1}}{n}\binom{n-1}{n-1}=\frac{1}{n}-\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

综上可得，结论成立.

18. (1) 利用题 18(2) 得

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^{r+1}}&=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{j+r}{j}x^{j}\\\frac{x^{r}}{(1-x)^{r+1}}&=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{j+r}{j}x^{j+r}\\&=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{j+r}{r}x^{j+r}\\&=\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n}{r}x^{n}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{r}x^{n}.\end{aligned}$$

(2) 利用 $(1-x)^{-1}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^{k}$ 得

$$\begin{aligned}((1-x)^{-1})^{(n-1)}&=\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^{k}\right)^{(n-1)}\\(n-1)!(1-x)^{-n}&=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{A}_{k}^{n-1}x^{k-(n-1)}\\(1-x)^{-n}&=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k}{n-1}x^{k-(n-1)}\\&=\sum_{k=n-1}^{\infty}\binom{k}{n-1}x^{k-(n-1)}\\&=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{j+n-1}{n-1}x^{j}\\&=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{j+n-1}{j}x^{j}.\end{aligned}$$

即得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^{k}=\frac{1}{(1-x)^{n}}.$$