Mathematics

以真题为核心　　以专题为主线

2018 年高考专题复习

文科数学

秦序网整理

www.qinxu.net
秦序 –专注于高中数学教育

Mathematics

以真题为核心　　以专题为主线

2018 年高考专题复习

文科数学

秦序网整理

www.qinxu.net
秦序 –专注于高中数学教育

内 容 简 介

本专题分类完整地汇集了从 2010 年至 2017 年 8 年高考共 15 套新课标全国卷文科数学真题，并附 近四年新课标全国卷文科数学考点归纳与预测. 每一专题均由基础提示、典例剖析和实战演练构成. 其中个别题目为了保证真题的完整性而没删，使用时应根据自己的能力与目的有所取舍.

本专题由 秦序网 站长整理汇集，用 LaTeX 2ε 编译, TikZ 作图. 秦序 –专注于高中数学教育，主要提供高考数学真题、高中数学方法技巧和教学资料，还有一个家教平台. LaTeX 2ε 是由美国计算机专家 Donald E. Knuth 发明的 TeX 发展出来的一种 所想即所得排版软件，其中的排版要求均有命令完成，只有经过编译才能得到结果，最突出的优点便是排版的数学公式很优美.

本专题可作为高三学生和数学教师复习资料，或其他高中数学教师参考资料.

个人能力有限，问题难免会有，期待读者提出宝贵意见！

王 旭

秦序网站长

一向对数学感兴趣，初中数学经常满分，高考数学成绩 144

2011 年回高中母校代高一到高三数学，毕业班高考数学成绩位列同类班级一二名

考研数学分析 140，高等代数 134

邮箱: iqinxu@163.com

Q Q: 193015308

微信: iqinxu

微博: iqinxu

网址: www.qinxu.net

编 辑: 王 旭

校 对: 王 旭

封面设计: 王 旭

中国 · 兰州 2017

Edited by LaTeX 2ε

Contents

1 集合与简易逻辑，复数和算法框图

1.1 集合与简易逻辑

1.1.1 ✌ 基础提示

1. 集合元素连续与否适合改写成区间或者列举 (数轴或 Venn 图) 以便显示其本质
2. $\cap, \cup \vee \complement$? $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z} \vee \mathbb{N}$?
3. 集合元素个数，集合子集个数 (真? 非空?)
4. 一元二次不等式 $ax^2+bx+c>(\geq,<\vee\leq)0$，$(x-x_1)(x-x_2)>(\geq,<\vee\leq)0$ 解集 (a?)
5. 四种命题的形式及真假，命题的否定，全称命题和特称命题的真假及否定
6. 归纳推理，逻辑 (演绎) 推理，反证法

1.1.2 ☞ 典例剖析

1. 17-2.1 设集合 $A=\{1,2,3\}, B=\{2,3,4\}$, 则 $A\cup B=$
   A. $\{1,2,3,4\}$　B. $\{1,2,3\}$　C. $\{2,3,4\}$　D. $\{1,3,4\}$
2. 16-3.1 设集合 $A=\{0,2,4,6,8,10\}, B=\{4,8\}$, 则 $\complement_A B=$
   A. $\{4,8\}$　B. $\{0,2,6\}$　C. $\{0,2,6,10\}$　D. $\{0,2,6,8,10\}$
3. 15-2.1 已知集合 $A=\{x|-1<x<2\}, B=\{x|0<x<3\}$, 则 $A\cup B=$
   A. $(-1,3)$　B. $(-1,0)$　C. $(0,2)$　D. $(2,3)$
4. 17-1.1 已知集合 $A=\{x\mid x<1\}, B=\{x\mid 3^x<1\}$, 则
   A. $A\cap B=\{x\mid x<0\}$　B. $A\cup B=\mathbf{R}$
   C. $A\cup B=\{x\mid x>1\}$　D. $A\cap B=\emptyset$
5. 17-3.1 已知集合 $A=\{1,2,3,4\}, B=\{2,4,6,8\}$. 则 $A\cap B$ 中元素的个数为
   A. 1　B. 2　C. 3　D. 4
6. 17-2.9 甲、乙、丙、丁四位同学一起去向老师询问英语竞赛的成绩. 老师说: 你们四人中有两位优秀, 两位良好, 我现在给甲看乙、丙的成绩, 给乙看丙的成绩, 给丁看甲的成绩. 看后甲对大家说: 我还是不知道我的成绩. 根据以上信息, 则
   A. 乙可以知道四人的成绩　B. 丁可以知道四人的成绩
   C. 乙、丁可以知道对方的成绩　D. 乙、丁可以知道自己的成绩

1.1.3 ✍ 实战演练

1. 16-2.1 已知集合 $A=\{1,2,3\}, B=\{x\mid x^2<9\}$, 则 $A\cap B=$
   A. $\{-2,-1,0,1,2,3\}$　B. $\{-2,-1,0,1,2\}$　C. $\{1,2,3\}$　D. $\{1,2\}$
2. 16-1.1 设集合 $A=\{1,3,5,7\}, B=\{x\mid 2\leq x\leq 5\}$, 则 $A\cap B=$
   A. $\{1,3\}$　B. $\{3,5\}$　C. $\{5,7\}$　D. $\{1,7\}$
3. 14-2.1 已知集合 $A=\{-2,0,2\}$，$B=\{x|x^2-x-2=0\}$, 则 $A\cap B=$
   A. $\emptyset$　B. $\{2\}$　C. $\{0\}$　D. $\{-2\}$
4. 14-1.1 已知集合 $M=\{x\mid -1<x<3\}, N=\{x\mid -2<x<1\}$, 则 $M\cap N=$
   A. $(-2,1)$　B. $(-1,1)$　C. $(1,3)$　D. $(-2,3)$
5. 13-2.1 已知集合 $M=\{x\mid -3<x<1\}$，$N=\{-3,-2,-1,0,1\}$, 则 $M\cap N=$
   A. $\{-2,-1,0,1\}$　B. $\{-3,-2,-1,0\}$　C. $\{-2,-1,0\}$　D. $\{-3,-2,-1\}$
6. 13-1.1 已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{x\mid x=n^2, n\in A\}$, 则 $A\cap B=$

A. $\{1,4\}$ B. $\{2,3\}$ C. $\{9,16\}$ D. $\{1,2\}$

7. 15-1.1 已知集合 $A=\{x|x=3n+2,n\in\mathbb{N}\}$, $B=\{6,8,10,12,14\}$, 则集合 $A\cap B$ 中元素的个数为

A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

8. 12.1 已知集合 $A=\{x\mid x^2-x-2<0\}$, $B=\{x\mid -1<x<1\}$, 则

A. $A\subsetneqq B$ B. $B\subsetneqq A$ C. $A=B$ D. $A\cap B=\emptyset$

9. 11.1 已知集合 $M=\{0,1,2,3,4\}$, $N=\{1,3,5\}$, $P=M\cap N$, 则 P 的子集共有

A. 2 个 B. 4 个 C. 6 个 D. 8 个

10. 10.1 已知集合 $A=\{x\mid |x|\le 2,x\in\mathbb{R}\}$, $B=\{x\mid \sqrt{x}\le 4,x\in\mathbb{Z}\}$, 则 $A\cap B=$

A. $(0,2)$ B. $[0,2]$ C. $\{0,2\}$ D. $\{0,1,2\}$

11. 16-2.16 有三张卡片, 分别写有 1 和 2, 1 和 3, 2 和 3. 甲, 乙, 丙三人各取走一张卡片, 甲看了乙的卡片说:“我与乙的卡片上相同的数字不是 2”, 乙看了丙的卡片后说:“我与丙的卡片上相同的数字不是 1”, 丙说:“我的卡片上的数字之和不是 5”, 则甲的卡片上的数字是__________.

12. 14-1.14 甲、乙、丙三位同学被问到是否去过 A, B, C 三个城市时，甲说：我去过的城市比乙多，但没去过 B 城市；乙说：我没去过 C 城市；丙说；我们三人去过同一城市. 由此可判断乙去过的城市是__________.

1.2 复数

1.2.1 ✌ 基础提示

1. $\mathrm{i}^2=-1$
2. $z=a+b\mathrm{i}\leftrightarrow Z(a,b)\leftrightarrow\overrightarrow{OZ}$; $\Re z\ \&\ \Im z$
3. $+,-,\times,\bar{z},\div\ \&\ =$
4. $|z|^2=a^2+b^2=z\bar{z}$, $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$, $|\dfrac{z_1}{z_2}|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

1.2.2 ☞ 典例剖析

1. 17-2.2 $(1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})=$

A. $1-\mathrm{i}$ B. $1+3\mathrm{i}$ C. $3+\mathrm{i}$ D. $3+3\mathrm{i}$

2. 16-3.2 若 $z=4+3\mathrm{i}$, 则 $\dfrac{\bar{z}}{|z|}=$

A. 1 B. -1 C. $\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$ D. $\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$

3. 16-2.2 设复数 z 满足 $z+\mathrm{i}=3-\mathrm{i}$, 则 $\bar{z}=$

A. $-1+2\mathrm{i}$ B. $1-2\mathrm{i}$ C. $3+2\mathrm{i}$ D. $3-2\mathrm{i}$

4. 17-1.3 下列各式的运算结果为纯虚数的是

A. $\mathrm{i}(1+\mathrm{i})^2$ B. $\mathrm{i}^2(1-\mathrm{i})$ C. $(1+\mathrm{i})^2$ D. $\mathrm{i}(1+\mathrm{i})$

5. 16-1.2 设 $(1+2\mathrm{i})(a+\mathrm{i})$ 的实部与虚部相等，其中 a 是实数, 则 $a=$

A. -3 B. -2 C. 2 D. 3

6. 17-3.2 复平面内表示复数 $z=\mathrm{i}(-2+\mathrm{i})$ 的点位于

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

1.2.3 ✍ 实战演练

1. 15-2.2 若 a 为实数，且 $\dfrac{2+a\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=3+\mathrm{i}$, 则 $a=$

A. -1 B. -3 C. 3 D. 4

2. 15-1.3 已知复数 z 满足 $(z-1)\mathrm{i}=1+\mathrm{i}$, 则 $z=$

A. $-2-\mathrm{i}$　　B. $-2+\mathrm{i}$　　C. $2-\mathrm{i}$　　D. $2+\mathrm{i}$

3. 14-2.2 $\dfrac{1+3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=$

A. $2-\mathrm{i}$　　B. $1-2\mathrm{i}$　　C. $-2+\mathrm{i}$　　D. $-1+2\mathrm{i}$

4. 11.2 复数 $\dfrac{5\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=$

A. $2-\mathrm{i}$　　B. $1-2\mathrm{i}$　　C. $-2+\mathrm{i}$　　D. $-1+2\mathrm{i}$

5. 13-1.2 $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^2}=$

A. $-1-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　　B. $-1+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　　C. $1+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　　D. $1-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

6. 12.2 复数 $\dfrac{-3+\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$ 的共轭复数是

A. $2+\mathrm{i}$　　B. $-1-\mathrm{i}$　　C. $-1+\mathrm{i}$　　D. $2-\mathrm{i}$

7. 14-1.3 设 $z=\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}+\mathrm{i}$, 则 $|z|=$

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 2

8. 13-2.2 $\left|\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}\right|=$

A. $2\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $\sqrt{2}$　　D. 1

9. 10.3 已知复数 $z=\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{(1-\sqrt{3}\mathrm{i})^2}$, 则 $|z|=$

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

1.3 算法框图

1.3.1 ✌ 基础提示

看懂框图中每一句话如何操作或运算

1. 每一个变量只能存一个值，而且是最新的值；题目要求 (哪个变量?)
2. 按部就班，一步一步往下算 (若能记着必修 3 第一章所学的几个算法更好)
3. 条件框图和循环框图如何区分
4. 条件框图中看菱形框决定何时分类，以何标准分类
5. 循环框图中看菱形框以决定循环类型以及终止条件

1.3.2 ☞ 典例剖析

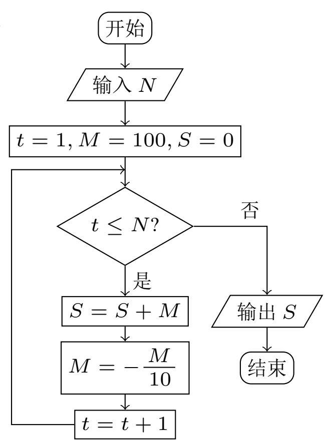
1. 17-3.8 执行右边的程序框图, 为使输出的 S 的值小于 91, 则输入的正整数 N 的最小值为

A. 5

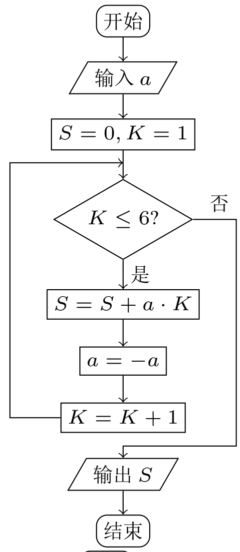
B. 4

C. 3

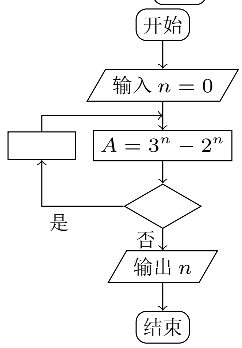
D. 2



2. 17-2.10 执行右边的程序框图, 如果输入的 $a=-1$, 则输出的 $S=$
   A. 2
   B. 3
   C. 4
   D. 5

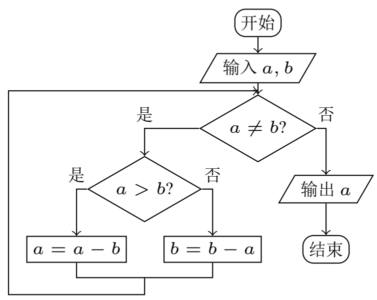


3. 17-1.10 右边程序框图是为了求出满足 $3^n-2^n>1000$ 的最小偶数 n, 那么在 ◇ 和 ▭ 两个空白框中, 可以分别填入
   A. $A>1000$ 和 $n=n+1$
   B. $A>1000$ 和 $n=n+2$
   C. $A\leq 1000$ 和 $n=n+1$
   D. $A\leq 1000$ 和 $n=n+2$

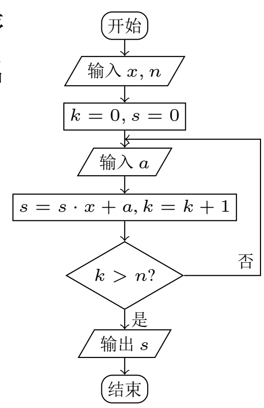


1.3.3 ✍ 实战演练

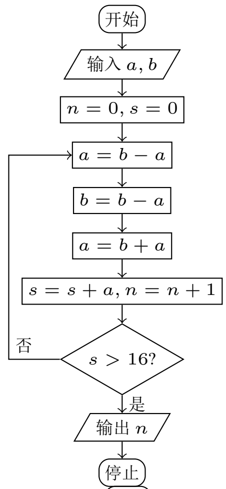
1. 15-2.8 右边程序框图的算法思想源于我国古代数学名著《九章算术》中的“更相减损术”. 执行该程序框图, 若输入的 a,b 分别为 $14,18$, 则输出的 $a=$
   A. 0
   B. 2
   C. 4
   D. 14



2. 16-2.9 中国古代有计算多项式值的秦九韶算法, 右图是实现该算法的的程序框图. 执行该程序框图, 若输入的 $x=2, n=2$, 依次输入的 a 为 $2,2,5$, 则输出的 $s=$
   A. 7
   B. 12
   C. 17
   D. 34



3. 16-3.8 执行右边的程序框图, 如果输入的 $a=4,\ b=6$, 那么输出的 $n=$



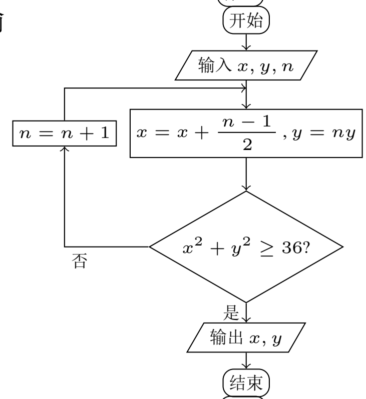
A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

4. 16-1.10 执行右边的程序框图, 如果输入的 $x=0, y=1, n=1$, 则输出 x, y 的值满足



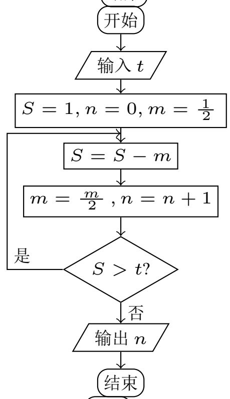
A. $y=2x$

B. $y=3x$

C. $y=4x$

D. $y=5x$

5. 15-1.9 执行右边的程序框图, 如果输入的 $t=0.01$, 则输出的 $n=$



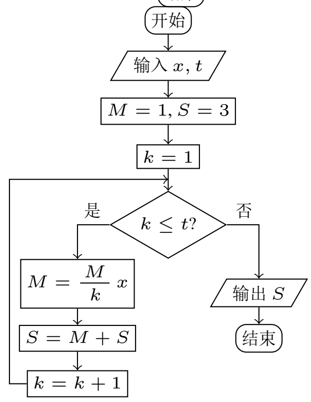
A. 5

B. 6

C. 7

D. 8

6. 14-2.8 执行右面的程序框图, 如果输入的 x, t 均为 2, 则输出的 $S=$



A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

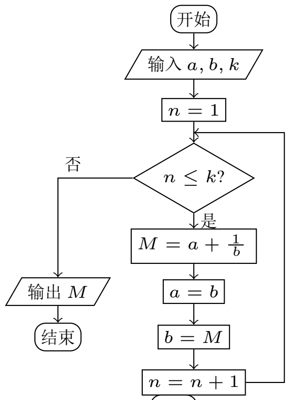
7. 14-1.9 执行右边的程序框图，若输入的 a,b,k 分别为 $1,2,3$, 则输出的 $M=$

A. $\dfrac{20}{3}$

B. $\dfrac{7}{2}$

C. $\dfrac{16}{5}$

D. $\dfrac{15}{8}$



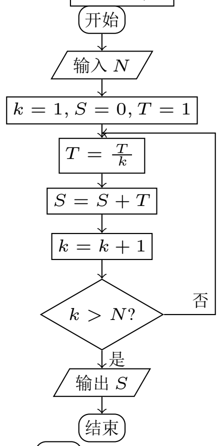
8. 13-2.7 执行如图的程序框图，如果输入的 $N=4$, 那么输出的 $S=$

A. $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}$

B. $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3\times 2}+\dfrac{1}{4\times 3\times 2}$

C. $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}$

D. $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3\times 2}+\dfrac{1}{4\times 3\times 2}+\dfrac{1}{5\times 4\times 3\times 2}$



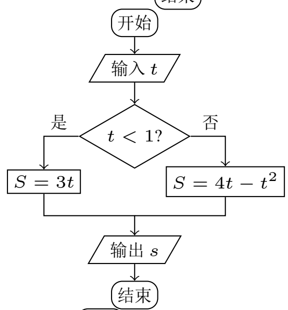
9. 13-1.7 执行右图的程序框图, 如果输入的 $t\in[-1,3]$, 那么输出的 s 属于

A. $[-3,4]$

B. $[-5,2]$

C. $[-4,3]$

D. $[-2,5]$



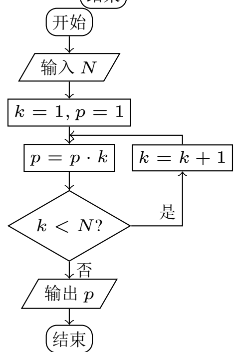
10. 11.5 执行右面的程序框图, 如果输入的 N 是 6, 那么输出的 p 是

A. 120

B. 720

C. 1440

D. 5040



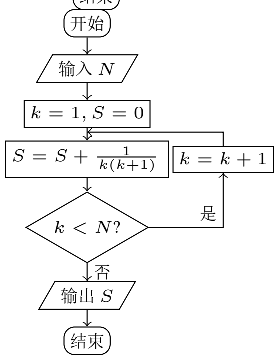
11. 10.8 如果执行右面的框图, 输入 $N=5$, 则输出数等于

A. $\dfrac{5}{4}$

B. $\dfrac{4}{5}$

C. $\dfrac{6}{5}$

D. $\dfrac{5}{6}$



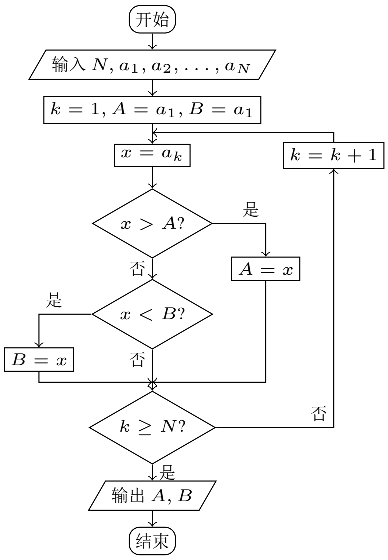
12. 12.8 如果执行右边的程序框图, 输入正整数 $N(N \geq 2)$ 和实数 $a_1, a_2, \cdots, a_N$, 输出 A, B, 则

A. $A+B$ 为 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ 的和

B. $\dfrac{A+B}{2}$ 为 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ 的算术平均数

C. A 和 B 分别是 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ 中最大的数和最小的数

D. A 和 B 分别是 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ 中最小的数和最大的数



2 函数与导数

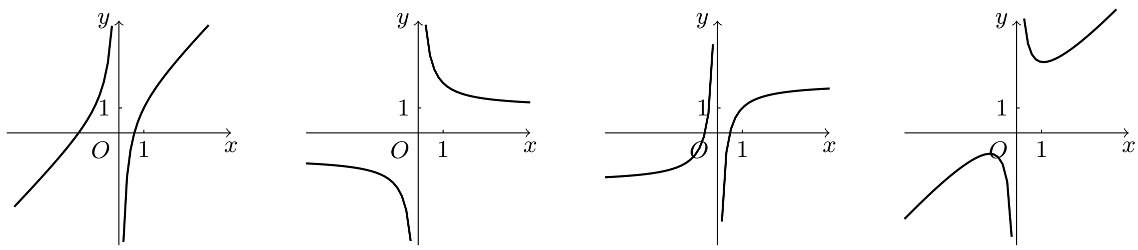
2.1 函数基本性质

2.1.1 ✌ 基础提示

1. 定义域 D, 函数值，值域 R 和图像
2. 单调性, 奇偶性和周期性
3. 指数函数, 对数函数和幂函数的性质
4. 分段函数的定义域 D, 值域 R 和图像及其他性质
5. 零点以及零点存在性定理
6. 一般的轴对称和中心对称

2.1.2 ☞ 典例剖析

1. 16-2.10 下列函数中，其定义域和值域分别与函数 $y=10^{\lg x}$ 的定义域和值域相同的是
   A. $y=x$　　B. $y=\lg x$　　C. $y=2^x$　　D. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
2. 15-2.13 已知函数 $f(x)=ax^3-2x$ 的图像过点 $(-1,4)$, 则 $a=$ __________.
3. 16-3.7 已知 $a=2^{\frac{4}{3}}$, $b=3^{\frac{2}{3}}$, $c=25^{\frac{1}{3}}$, 则
   A. $b<a<c$　　B. $a<b<c$　　C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$
4. 17-1.9 已知函数 $f(x)=\ln x+\ln(2-x)$, 则
   A. $f(x)$ 在 $(0,2)$ 单调递增　　B. $f(x)$ 在 $(0,2)$ 单调递减
   C. $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称　　D. $y=f(x)$ 的图像关于点 $(1,0)$ 对称
5. 17-2.14 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x\in(-\infty,0)$ 时, $f(x)=2x^3+x^2$, 则 $f(2)=$ ________.
6. 17-3.16 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 0,\\ 2^x, & x>0,\end{cases}$ 则满足 $f(x)+f(x-\dfrac{1}{2})>1$ 的 x 的取值范围是________.
7. 15-2.12 设函数 $f(x)=\ln(1+|x|)-\dfrac{1}{1+x^2}$, 则使得 $f(x)>f(2x-1)$ 成立的 x 的取值范围是
   A. $(\dfrac{1}{3},1)$　　B. $(-\infty,\dfrac{1}{3})\cup(1,+\infty)$
   C. $(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3})$　　D. $(-\infty,-\dfrac{1}{3})\cup(\dfrac{1}{3},+\infty)$
8. 17-3.12 已知函数 $f(x)=x^2-2x+a(\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{-x+1})$ 有唯一零点, 则 $a=$
   A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 1
9. 17-3.7 函数 $y=1+x+\dfrac{\sin x}{x^2}$ 的部分图像大致为



(A)　(B)　(C)　(D)

2.1.3 ✍ 实战演练

1. 17-2.8 函数 $f(x)=\ln(x^2-2x-8)$ 的单调递增区间是

A. $(-\infty,-2)$　　B. $(-\infty,1)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(4,+\infty)$

2. 14-1.5 设函数 $f(x),g(x)$ 的定义域都为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，则下列结论中正确的是

A. $f(x)g(x)$ 是偶函数　B. $|f(x)|g(x)$ 是奇函数　C. $f(x)|g(x)|$ 是奇函数　D. $|f(x)g(x)|$ 是奇函数

3. 11.3 下列函数中，既是偶函数又在 $(0,+\infty)$ 单调递增的函数是

A. $y=x^3$　　B. $y=|x|+1$　　C. $y=-x^2+1$　　D. $y=2^{-|x|}$

4. 13-1.5 已知命题 $p:\forall x\in\mathbf{R},\ 2^x<3^x$；命题 $q:\exists x\in\mathbf{R},\ x^3=1-x^2$, 则下列命题中为真命题的是

A. $p\wedge q$　　B. $\neg p\wedge q$　　C. $p\wedge\neg q$　　D. $\neg p\wedge\neg q$

5. 16-1.8 若 $a>b>1,0<c<1$, 则

A. $\log_a c<\log_b c$　　B. $\log_c a<\log_c b$　　C. $a^c<b^c$　　D. $c^a>c^b$

6. 13-2.8 设 $a=\log_3 2,\ b=\log_5 2,\ c=\log_2 3$, 则

A. $a>c>b$　　B. $b>c>a$　　C. $c>b>a$　　D. $c>a>b$

7. 15-1.10 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^{x-1}-2, & x\leqslant 1,\\ -\log_2(x+1), & x>1,\end{cases}$ 且 $f(a)=-3$, 则 $f(6-a)=$

A. $-\dfrac{7}{4}$　　B. $-\dfrac{5}{4}$　　C. $-\dfrac{3}{4}$　　D. $-\dfrac{1}{4}$

8. 14-1.15 设函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x-1}, & x<1,\\ x^{\frac{1}{3}}, & x\geq 1,\end{cases}$ 则使得 $f(x)\leq 2$ 成立的 x 的取值范围是__________.

9. 11.10 在下列区间中，函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+4x-3$ 的零点所在的区间为

A. $(-\dfrac{1}{4},0)$　　B. $(0,\dfrac{1}{4})$　　C. $(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2})$　　D. $(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4})$

10. 12.16 设函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2+\sin x}{x^2+1}$ 的最大值为 M, 最小值为 m, 则 $M+m=$__________.

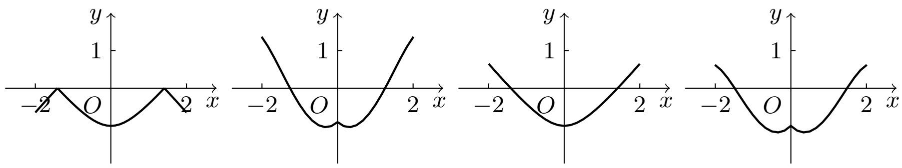
11. 10.9 设偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=2^x-4(x\geq 0)$, 则 $\{x\mid f(x-2)>0\}=$

A. $\{x\mid x<-2\vee x>4\}$　　B. $\{x\mid x<0\vee x>4\}$

C. $\{x\mid x<0\vee x>6\}$　　D. $\{x\mid x<-2\vee x>2\}$

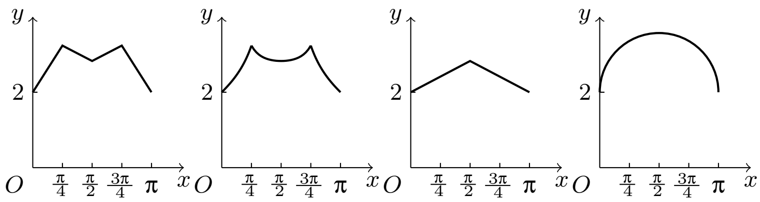
12. 14-2.15 偶函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称，$f(3)=3$, 则 $f(-1)=$__________.

13. 16-1.9 函数 $y=2x^2-\mathrm{e}^{|x|}$ 在 $[-2,2]$ 的图像大致为

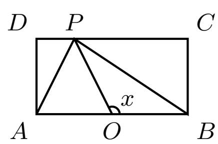


(A)　(B)　(C)　(D)

14. 15-2.11 如图，长方形 $ABCD$ 的边 $AB=2,BC=1,O$ 是 AB 的中点. 点 P 沿着边 BC,CD与DA 运动，记 $\angle BOP=x$. 将动点 P 到 A,B 两点距离之和表示为 x 的函数 $f(x)$, 则 $y=f(x)$ 的图像大致为



(A)　(B)　(C)　(D)



15. 12.11 当 $0<x\leq\dfrac{1}{2}$ 时，$4^x<\log_a x$, 则 a 的取值范围是

A. $(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$　　B. $(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1)$　　C. $(1,\sqrt{2})$　　D. $(\sqrt{2},2)$

16. 11.12 已知函数 $y=f(x)$ 的周期为 2，当 $x\in[-1,1]$ 时，$f(x)=x^2$, 那么函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=|\lg x|$ 的图象的交点共有

A. 10 个　　B. 9 个　　C. 8 个　　D. 1 个

17. 16-2.12 已知函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 满足 $f(x)=f(2-x)$, 若函数 $y=|x^2-2x-3|$ 与 $y=f(x)$ 图像的交点为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_m,y_m)$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{m}x_i=$

A. 0　　B. m　　C. $2m$　　D. $4m$

18. 10.12 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\lg x|, & 0<x\le 10,\\ -\dfrac{1}{2}x+6, & x>10.\end{cases}$ 若 a,b,c 互不相等，且 $f(a)=f(b)=f(c)$, 则 abc 取值范围是

A. $(1,10)$　　B. $(5,6)$　　C. $(10,12)$　　D. $(20,24)$

19. 15-1.12 设函数 $y=f(x)$ 的图像与 $y=2^{x+a}$ 的图像关于直线 $y=-x$ 对称，且 $f(-2)+f(-4)=1$, 则 $a=$

A. -1　　B. 1　　C. 2　　D. 4

2.2　导数及其应用

2.2.1　✌ 基础提示

1. 一元二次不等式
2. 导数定义及其几何意义, 切点的双重身份
3. 求导公式
4. 利用导数解决单调性, 极值和最值
5. 两类不等式成立的本质
6. 一元三次函数的基本性质和图像
7. 基本不等式

2.2.2　☞ 典例剖析

1. 17-1.14 曲线 $y=x^2+\dfrac{1}{x}$ 在点 $(1,2)$ 处的切线方程为____________.

2. 16-1.12 若函数 $f(x)=x-\dfrac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增，则 a 的取值范围是

A. $[-1,1]$　　B. $[-1,\dfrac{1}{3}]$　　C. $[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}]$　　D. $[-1,-\dfrac{1}{3}]$

3. 15-2.16 已知曲线 $y=x+\ln x$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程与曲线 $y=ax^2+(a+2)x+1$ 相切，则 $a=$____________.

4. 17-2.21 已知函数 $f(x)=(1-x^2)\mathrm{e}^x$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 当 $x\ge 0$ 时, $f(x)\le ax+1$, 求 a 的取值范围.

5. 16-2.20 已知函数 $f(x)=(x+1)\ln x-a(x-1)$.

(I) 当 $a=4$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程;

(II) 若当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $f(x)>0$, 求 a 的取值范围.

2.2.3 ✍ 实战演练

1. 16-3.16 已知 $f(x)$ 为偶函数, 当 $x \le 0$ 时, $f(x) = \mathrm{e}^{-x-1} - x$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1,2)$ 处的切线方程是 ________.
2. 15-1.14 已知函数 $f(x) = ax^3 + x + 1$ 的图像在点 $(1, f(1))$ 处的切线过点 $(2,7)$, 则 $a =$ ________.
3. 12.13 曲线 $y = x(3\ln x + 1)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为________.
4. 10.4 曲线 $y = x^3 - 2x + 1$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为

   A. $y = x - 1$　　B. $y = -x + 1$　　C. $y = 2x - 2$　　D. $y = -2x + 2$
5. 13-1.12 已知函数 $f(x) \begin{cases} -x^2 + 2x, & x \le 0, \\ \ln(x+1), & x > 0. \end{cases}$ 若 $|f(x)| \ge ax$, 则 a 的取值范围是

   A. $(-\infty, 0]$　　B. $(-\infty, 1]$　　C. $[-2, 1]$　　D. $[-2, 0]$
6. 14-2.11 若函数 $f(x) = kx - \ln x$ 在区间 $(1, +\infty)$ 单调递增，则 k 的取值范围是

   A. $(-\infty, -2]$　　B. $(-\infty, -1]$　　C. $[2, +\infty)$　　D. $[1, +\infty)$
7. 14-2.3 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处导数存在. 若 $p: f'(x_0) = 0; q: x = x_0$ 是 $f(x)$ 的极值点，则

   A. p 是q 的充分必要条件　　B. p 是 q 的充分条件，但不是 q 的必要条件

   C. p 是 q 的必要条件, 但不是 q 的充分条件　　D. p 既不是 q 的充分条件, 也不是 q 的必要条件
8. 13-2.12 若存在正数 x 使 $2^x(x-a) < 1$ 成立，则 a 的取值范围是

   A. $(-\infty, +\infty)$　　B. $(-2, +\infty)$　　C. $(0, +\infty)$　　D. $(-1, +\infty)$
9. 14-1.12 已知函数 $f(x) = ax^3 - 3x^2 + 1$, 若 $f(x)$ 存在唯一的零点 x_0, 且 $x_0 > 0$, 则 a 的取值范围是

   A. $(2, +\infty)$　　B. $(1, +\infty)$　　C. $(-\infty, -2)$　　D. $(-\infty, -1)$
10. 13-2.11 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, 下列结论中错误的是

    A. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, f(x_0) = 0$

    B. 函数 $y = f(x)$ 的图象是中心对称图形

    C. 若 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点, 则 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, x_0)$ 单调递减

    D. 若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点, 则 $f'(x_0) = 0$
11. 17-3.21 已知函数 $f(x) = \ln x + ax^2 + (2a+1)x$.

    (I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

    (II) 当 $a < 0$ 时, 证明 $f(x) \le -\dfrac{3}{4a} - 2$.

12. 17-1.21 已知函数 $f(x) = \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - a) - a^2x$.

    (I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

    (II) 若 $f(x) \ge 0$, 求 a 的取值范围.

13. 16-3.21 设函数 $f(x) = \ln x - x + 1$.

    (I) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

    (II) 证明当 $x \in (1, +\infty)$ 时，$1 < \dfrac{x-1}{\ln x} < x$;

    (III) 设 $c > 1$, 证明当 $x \in (0,1)$ 时，$1 + (c-1)x > c^x$.

14. 16-1.21 已知函数 $f(x) = (x-2)\mathrm{e}^x + a(x-1)^2$.

    (I) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

    (II) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

15. 15-2.21 已知函数 $f(x) = \ln x + a(1-x)$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(II) 当 $f(x)$ 有最大值，且最大值大于 $2a-2$ 时，求 a 的取值范围.

16. 14-2.21 已知函数 $f(x)=x^3-3x^2+ax+2$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,2)$ 处的切线与 x 轴交点的横坐标为 -2.

(I) 求 a；

(II) 证明：当 $k<1$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=kx-2$ 只有一个交点.

17. 14-1.21 设函数 $f(x)=a\ln x+\dfrac{1-a}{2}x^2-bx(a\neq 1)$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为 0.

(I) 求 b；

(II) 若存在 $x_0\geq 1$, 使得 $f(x_0)<\dfrac{a}{a-1}$, 求 a 的取值范围.

18. 13-2.21 已知函数 $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}$.

(I) 求 $f(x)$ 的极小值和极大值；

(II) 当曲线 $y=f(x)$ 的切线 l 的斜率为负数时，求 l 在 x 轴上截距的取值范围.

19. 13-1.20 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x(ax+b)-x^2-4x$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=4x+4$.

(I) 求 a,b 的值；

(II) 讨论 $f(x)$ 的单调性，并求 $f(x)$ 的极大值.

20. 12.21 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax-2$.

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(II) 若 $a=1$, k 为整数，且当 $x>0$ 时，$(x-k)f'(x)+x+1>0$, 求 k 的最大值.

21. 10.21 已知函数 $f(x)=x(\mathrm{e}^x-1)-ax^2$.

(I) 若 $a=\dfrac{1}{2}$, 求 $f(x)$ 的单调区间；

(II) 若当 $x\geq 0$ 时 $f(x)\geq 0$, 求 a 的取值范围.

22. 15-1.21 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}-a\ln x$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 零点的个数；

(II) 证明：当 $a>0$ 时，$f(x)\geqslant 2a+a\ln\dfrac{2}{a}$.

23. 11.21 已知函数 $f(x)=\dfrac{a\ln x}{x+1}+\dfrac{b}{x}$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $x+2y-3=0$.

(I) 求 a,b 的值；

(II) 证明：当 $x>0$, 且 $x\neq 1$ 时，$f(x)>\dfrac{\ln x}{x-1}$.

3 平面向量和三角函数

3.1 平面向量

3.1.1 ✌ 基础提示

1. $\overrightarrow{AB}, \boldsymbol{a}$ & $\boldsymbol{a}=(x,y)$
2. $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}$ & $\lambda\boldsymbol{a}$
3. $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ & $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$
4. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}, <\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$ & $|\boldsymbol{a}|$

3.1.2 ☞ 典例剖析

1. 17-3.13 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-2,3)$, $\boldsymbol{b}=(3,m)$, 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 则 $m=$________.
2. 15-1.2 已知点 $A(0,1)$, $B(3,2)$, 向量 $\overrightarrow{AC}=(-4,-3)$, 则向量 $\overrightarrow{BC}=$
   A. $(-7,-4)$　B. $(7,4)$　C. $(-1,4)$　D. $(1,4)$
3. 16-2.13 已知向量 $\boldsymbol{a}=(m,4)$, $\boldsymbol{b}=(3,-2)$, 且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, 则 $m=$__________.
4. 15-2.4 向量 $\boldsymbol{a}=(1,-1)$, $\boldsymbol{b}=(-1,2)$, 则 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=$
   A. -1　B. 0　C. 1　D. 2
5. 17-2.4 设非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$, 则
   A. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$　B. $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$　C. $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$　D. $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$

3.1.3 ✍ 实战演练

1. 14-1.6 设 D,E,F 分别为 $\triangle ABC$ 的三边 BC,CA,AB 的中点, 则 $\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}=$
   A. $\overrightarrow{AD}$　B. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$　C. $\overrightarrow{BC}$　D. $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
2. 13-2.14 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2, E 为 CD 的中点, 则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=$__________.
3. 17-1.13 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$, $\boldsymbol{b}=(m,1)$. 若向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直, 则 $m=$________.
4. 16-3.3 已知向量 $\overrightarrow{BA}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$, $\overrightarrow{BC}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$, 则 $\angle ABC=$
   A. 30°　B. 45°　C. 60°　D. 120°
5. 10.2 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为平面向量, 已知 $\boldsymbol{a}=(4,3)$, $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,18)$, 则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值等于
   A. $\frac{8}{65}$　B. $-\frac{8}{65}$　C. $\frac{16}{65}$　D. $-\frac{16}{65}$
6. 13-1.13 已知两个单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°, $\boldsymbol{c}=t\boldsymbol{a}+(1-t)\boldsymbol{b}$, 若 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$, 则 $t=$__________.
7. 11.13 已知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为两个不共线的单位向量, k 为实数, 若向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与向量 $k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 垂直, 则 $k=$__________.
8. 16-1.13 设向量 $\boldsymbol{a}=(x,x+1)$, $\boldsymbol{b}=(1,2)$, 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 则 $x=$__________.
9. 14-2.4 设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$, $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{6}$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$
   A. 1　B. 2　C. 3　D. 5
10. 12.15 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 45°, 且 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$, 则 $|\boldsymbol{b}|=$__________.

3.2 三角函数

3.2.1 ✌ 基础提示

1. $1\,\mathrm{rad}=?$ $\alpha,r,l,\&S?$
2. $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ & $\tan\alpha$

3. $\sin(\vee\cos\vee\tan)(\alpha+2k\pi\ \vee\ -\alpha\ \vee\ \pi\pm\alpha)$, $\sin(\vee\cos)(\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha)$
4. 函数 $y=\sin x$, $y=\cos x$ & $y=\tan x$ 的性质
5. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 的性质
6. $\sin(\vee\cos\vee\tan)(\alpha\pm\beta\ \vee\ 2\alpha)$
7. $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ & $y=a\sin x+b\cos x$,
8. $\sin A$ & a? $\cos A$ & a,b,c? $S_\triangle$ & a,b,C?

3.2.2 ☞ 典例剖析

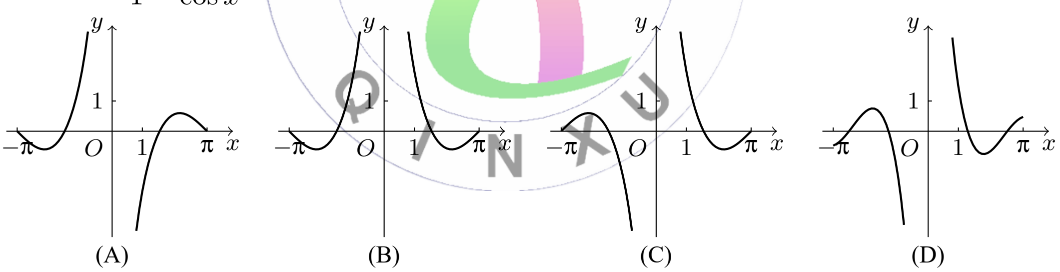
1. 17-3.4 已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{4}{3}$, 则 $\sin 2\alpha=$

   A. $-\dfrac{7}{9}$　B. $-\dfrac{2}{9}$　C. $\dfrac{2}{9}$　D. $\dfrac{7}{9}$
2. 17-3.15 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 已知 $C=60°$, $b=\sqrt{6}$, $c=3$. 则 $A=$ ________.
3. 16-3.6 若 $\tan\theta=-\dfrac{1}{3}$, 则 $\cos 2\theta=$

   A. $-\dfrac{4}{5}$　B. $-\dfrac{1}{5}$　C. $\dfrac{1}{5}$　D. $\dfrac{4}{5}$
4. 17-3.6 函数 $f(x)=\dfrac{1}{5}\sin(x+\dfrac{\pi}{3})+\cos(x-\dfrac{\pi}{6})$ 的最大值为

   A. $\dfrac{6}{5}$　B. 1　C. $\dfrac{3}{5}$　D. $\dfrac{1}{5}$
5. 17-2.13 函数 $f(x)=2\cos x+\sin x$ 的最大值为________.
6. 17-2.3 函数 $f(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$ 的最小正周期为

   A. 4π　B. 2π　C. π　D. $\dfrac{\pi}{2}$
7. 17-1.8 函数 $y=\dfrac{\sin 2x}{1-\cos x}$ 的部分图像大致为



8. 16-3.14 函数 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的图像可由函数 $y=2\sin x$ 的图像至少向右平移__________个单位长度得到.
9. 16-3.9 在 $\triangle ABC$ 中, $B=\dfrac{\pi}{4}$, BC 边上的高等于 $\dfrac{1}{3}BC$, 则 $\sin A=$

   A. $\dfrac{3}{10}$　B. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　C. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　D. $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$
10. 15-2.17 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 上的点, AD 平分 $\angle BAC$, $BD=2DC$.

    (I) 求 $\dfrac{\sin B}{\sin C}$;

    (II) 若 $\angle BAC=60°$, 求 $\angle B$.

3.2.3 ✍ 实战演练

1. 17-1.15 已知 $\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$, $\tan\alpha=2$, 则 $\cos(\alpha-\dfrac{\pi}{4})=$ ________.
2. 16-1.14 已知 θ 是第四象限角, 且 $\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{3}{5}$, 则 $\tan(\theta-\dfrac{\pi}{4})$ __________.
3. 14-1.2 若 $\tan\alpha>0$, 则

   A. $\sin\alpha>0$　B. $\cos\alpha>0$　C. $\sin 2\alpha>0$　D. $\cos 2\alpha>0$

4. 13-2.6 已知 $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$, 则 $\cos^2(\alpha + \frac{\pi}{4})$

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

5. 11.7 已知角 θ 的顶点与原点重合, 始边与 x 轴的正半轴重合, 终边在直线 $y = 2x$ 上, 则 $\cos 2\theta =$

A. $-\frac{4}{5}$　　B. $-\frac{3}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

6. 10.10 若 $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, α 是第三象限角, 则 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) =$

A. $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$　　B. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$　　C. $-\frac{\sqrt{2}}{10}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{10}$

7. 16-2.11 函数 $f(x) = \cos 2x + 6\cos(\frac{\pi}{2} - x)$ 的最大值为

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

8. 16-1.6 将函数 $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 的图像向右平移 $\frac{1}{4}$ 个周期后, 所得图像对应的函数为

A. $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{4})$　　B. $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$　　C. $y = 2\sin(2x - \frac{\pi}{4})$　　D. $y = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$

9. 14-2.14 函数 $f(x) = \sin(x + \varphi) - 2\sin\varphi\cos x$ 的最大值为__________.

10. 14-1.7 在函数 ①$y = \cos|2x|$, ②$y = |\cos x|$, ③$y = \cos(2x + \frac{\pi}{6})$, ④$y = \tan(2x - \frac{\pi}{4})$ 中, 最小正周期为 π 的所有函数为

A. ①②③　　B. ①③④　　C. ②④　　D. ①③

11. 13-2.16 函数 $y = \cos(2x + \varphi)(-\pi \le \varphi < \pi)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位后, 与函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图象重合, 则 $\varphi =$ __________.

12. 13-1.16 设当 $x = \theta$ 时, 函数 $f(x) = \sin x - 2\cos x$ 取得最大值, 则 $\cos\theta =$ __________.

13. 12.9 已知 $\omega > 0$, $0 < \varphi < \pi$, 直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 和 $x = \frac{5\pi}{4}$ 是函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 图象的两条相邻的对称轴, 则 $\varphi =$

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{3\pi}{4}$

14. 11.11 设函数 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + \cos(2x + \frac{\pi}{4})$, 则

A. $y = f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 单调递增, 其图象关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称

B. $y = f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 单调递增, 其图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称

C. $y = f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 单调递减, 其图象关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称

D. $y = f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 单调递减, 其图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称

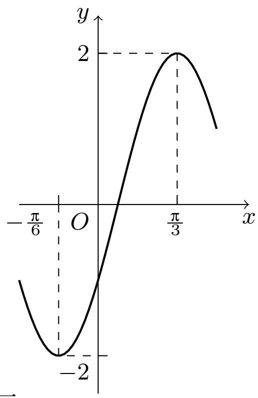
15. 16-2.3 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图像如图所示, 则

A. $y = 2\sin(2x - \frac{\pi}{6})$

B. $y = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$

C. $y = 2\sin(x + \frac{\pi}{6})$

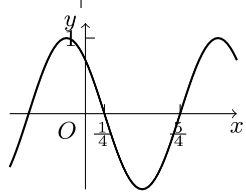
D. $y = 2\sin(x + \frac{\pi}{3})$



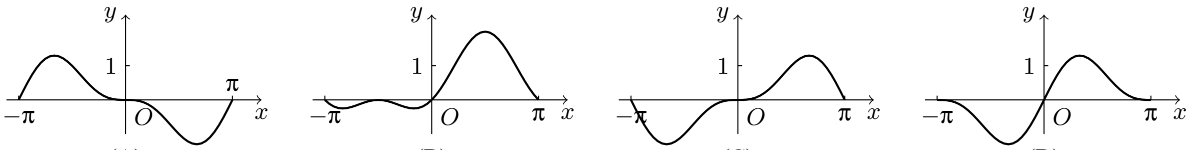
16. 15-1.8 函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ 的部分图像如图所示, 则 $f(x)$ 的单调递减区间为

A. $(k\pi - \frac{1}{4}, k\pi + \frac{3}{4}), k \in \mathbf{Z}$　　B. $(2k\pi - \frac{1}{4}, 2k\pi + \frac{3}{4}), k \in \mathbf{Z}$

C. $(k - \frac{1}{4}, k + \frac{3}{4}), k \in \mathbf{Z}$　　D. $(2k - \frac{1}{4}, 2k + \frac{3}{4}), k \in \mathbf{Z}$

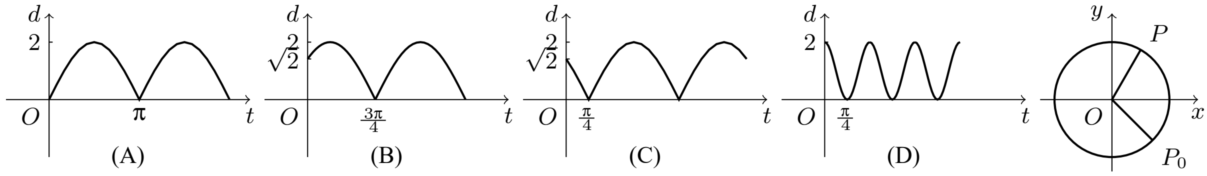


17. 13-1.9 函数 $f(x) = (1 - \cos x)\sin x$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的图象大致为



(A) (B) (C) (D)

18. 10.6 如图, 质点 P 在半径为 2 的圆周上逆时针运动, 其初始位置为 $P_0(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, 角速度为 1, 那么点 P 到 x 轴距离 d 关于时间 t 的函数图象大致为



(A) (B) (C) (D)

19. 17-2.16 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c, 若 $2c\cos B=a\cos C+c\cos A$, 则 $B=$ ________.

20. 17-1.11 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 已知 $\sin B+\sin A(\sin C-\cos C)=0$, $a=2$, $c=\sqrt{2}$, 则 $C=$

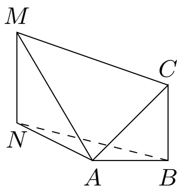
 A. $\dfrac{\pi}{12}$ B. $\dfrac{\pi}{6}$ C. $\dfrac{\pi}{4}$ D. $\dfrac{\pi}{3}$

21. 16-2.15 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c, 若 $\cos A=\dfrac{4}{5}$, $\cos C=\dfrac{5}{13}$, $a=1$, 则 $b=$ ___________.

22. 16-1.4 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c, 若 $a=\sqrt{5}$, $c=2$, $\cos A=\dfrac{2}{3}$, 则 $b=$

 A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 3

23. 14-1.16 如图, 为测量山高 MN, 选择 A 和另一座山的山顶 C 为测量观测点. 从 A 点测得点 M 的仰角 $\angle MAN=60°$, C 点的仰角 $\angle CAB=45°$ 以及 $\angle MAC=75°$; 从 C 点测得 $\angle MCA=60°$, 已知山高 $BC=100\,\text{m}$, 则山高 $MN=$ ___________ m.



24. 13-1.10 已知锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c, $23\cos^2 A+\cos 2A=0$, $a=7$, $c=6$, 则 $b=$

 A. 10 B. 9 C. 8 D. 5

25. 10.16 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 边上一点, $BC=3BD$, $AD=\sqrt{2}$, $\angle ADB=135°$. 若 $AC=\sqrt{2}AB$, 则 $BD=$ ___________.

26. 13-2.4 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c, 已知 $b=2$, $B=\dfrac{\pi}{6}$, $C=\dfrac{\pi}{4}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为

 A. $2\sqrt{3}+2$ B. $\sqrt{3}+1$ C. $2\sqrt{3}-2$ D. $\sqrt{3}-1$

27. 11.15 $\triangle ABC$ 中, $B=120°$, $AC=7$, $AB=5$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为___________.

28. 15-1.17 已知 a,b,c 分别为 $\triangle ABC$ 内角 A,B,C 的对边, $\sin^2 B=2\sin A\sin C$.

 (I) 若 $a=b$, 求 $\cos B$;

 (II) 设 $B=90°$, 且 $a=\sqrt{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

29. 14-2.17 四边形 $ABCD$ 的内角 A 与 C 互补, $AB=1$, $BC=3$, $CD=DA=2$.

 (I) 求 C 和 BD ;

 (II) 求四边形 $ABCD$ 的面积.

30. 12.17 已知 a,b,c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A,B,C 的对边, $c=\sqrt{3}a\sin C-c\cos A$.

(I) 求 A ;

(II) 若 $a=2$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求 b, c.

4 数列

4.0.1 ✌ 基础提示

1. a_1 & d. a_n & S_n
2. a_1 & q. a_n & $S_n(q?)$
3. $m+n=p+q$, ? $2n=p+q$, ?
4. $S_{2n-1}=?$
5. S_1 & S_n-S_{n-1}
6. a_1 & d. $\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{1}{a_ja_{j+1}}$, $\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{a_j}+\sqrt{a_{j+1}}}$, $\cdots$

4.0.2 ☞ 典例剖析

1. 15-1.7 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_8=4S_4$, 则 $a_{10}=$
   A. $\dfrac{17}{2}$ B. $\dfrac{19}{2}$ C. 10 D. 12
2. 15-2.9 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{1}{4}$, $a_3a_5=4(a_4-1)$, 则 $a_2=$
   A. 2 B. 2 C. $\dfrac{1}{2}$ D. $\dfrac{1}{8}$
3. 14-2.16 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\dfrac{1}{1-a_n}$, $a_8=2$, 则 $a_1=$__________.
4. 17-2.17 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n, $a_1=-1$, $b_1=1$, $a_2+b_2=2$.
   (I) 若 $a_3+b_3=5$, 求 $\{b_n\}$ 的通项公式;
   (II) 若 $T_3=21$, 求 S_3.
5. 17-1.17 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $S_2=2$, $S_3=-6$.
   (I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
   (II) 求 S_n, 并判断 S_{n+1}, S_n, S_{n+2} 是否成等差数列.
6. 17-3.17 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+3a_2+\cdots+(2n-1)a_n=2n$.
   (I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
   (II) 求数列 $\{\dfrac{a_n}{2n+1}\}$ 的前 n 项和.

4.0.3 ✍ 实战演练

1. 14-2.5 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2, 若 a_2, a_4, a_8 成等比数列, 则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=$
   A. $n(n+1)$ B. $n(n-1)$ C. $\dfrac{n(n+1)}{2}$ D. $\dfrac{n(n-1)}{2}$
2. 15-2.5 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_1+a_3+a_5=3$, 则 $S_5=$
   A. 5 B. 7 C. 9 D. 11
3. 15-1.13 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$, $a_{n+1}=2a_n$, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_n=126$, 则 $n=$__________.
4. 13-1.6 设首项为 1, 公比为 $\dfrac{2}{3}$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 则
   A. $S_n=2a_n-1$ B. $S_n=3a_n-2$ C. $S_n=4-3a_n$ D. $S_n=3-2a_n$
5. 12.14 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $S_3+3S_2=0$, 则公比 $q=$__________.

6. 12.12 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n-1$, 则 $\{a_n\}$ 的前 60 项和为

A. 3690 B. 1830 C. 1845 D. 3660

7. 16-3.17 已知各项都为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,\ a_n^2-(2a_{n+1}-1)a_n-2a_{n+1}=0$.

(I) 求 a_2,a_3；

(II) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

8. 16-2.17 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3+a_4=7,\ a_5+a_7=6$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $b_n=[a_n]$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 10 项和, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 如 $[0.9]=0,[2.6]=2$.

9. 13-2.17 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差不为零, $a_1=25$, 且 a_1,a_{11},a_{13} 成等比数列.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 求 $a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{3n-2}$.

10. 13-1.17 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_3=0,\ S_5=-5$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 求数列 $\left\{\dfrac{1}{a_{2n-1}a_{2n+1}}\right\}$ 的前 n 项和.

11. 11.17 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=\dfrac{1}{3}$, 公比 $q=\dfrac{1}{3}$.

(I) S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 证明：$S_n=\dfrac{1-a_n}{2}$；

(II) 设 $b_n=\log_3 a_1+\log_3 a_2+\cdots+\log_3 a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

12. 16-1.17 数列 $\{a_n\}$ 是公差为 3 的等差数列, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=1,\ b_2=\dfrac{1}{3}$, $a_nb_{n+1}+b_{n+1}=nb_n$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

13. 14-1.17 已知 $\{a_n\}$ 是递增的的等差数列, a_2,a_4 是方程 $x^2-5x+6=0$ 的根.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 求数列 $\{\frac{a_n}{2^n}\}$ 的前 n 项和.

14. 10.17 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_5=5,\ a_{10}=-9$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 及使得 S_n 最大的序号 n 的值.

5 不等式

不等式基本性质；可加不可减；若 $ab>0$, 则$a>b \Leftrightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

5.1 一元二次不等式 (题略)

✌ 基础提示

1. 二次项系数含参
   (a) 参数可以使二次项系数为 0，一次不等式
   (b) 二次项系数不为 0，一元二次不等式
2. 二次项系数不含参
   可以借助于对应的一元二次函数图像
   (a) $ax^2+bx+c>(<,\geq\vee\leq)0$
   先求两根 (若存在)，再根据两边中间
   (b) $(x-x_1)(x-x_2)>(<,\geq\vee\leq)0$

5.2 线性规划

5.2.1 ✌ 基础提示

1. 二元一次不等式
2. 约束条件 → 可行解 → 可行域，(线性) 目标函数 → 最优解 → 最值
3. 一般情况下，最优解都在顶点处，……
4. 若 $\begin{cases} m_1\leq f_1(x,y)\leq M_1, \\ m_2\leq f_2(x,y)\leq M_2. \end{cases}$ 目标函数为 $z=f(x,y)$. 先解得 $f(x,y)=k_1f_1(x,y)+k_2f_2(x,y)$, 则 $k_1m_1+k_2m_2\leq f(x,y)\leq k_1M_1+k_2M_2$
5. 若约束条件含参，则一般最值已知，由目标函数确定的直线一定过可行域的边界 (点)
6. 目标函数非线性，意义 (如 $z=\frac{y-b}{x-a}$, $z=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ 等)?

5.2.2 ☞ 典例剖析

1. 17-2.7 设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x+2y-3\leq 0, \\ 2x-3y+3\geq 0, \\ y+3\geq 0, \end{cases}$ 则 $z=2x+y$ 的最小值是

   A. -15　　B. -9　　C. 1　　D. 9

2. 17-1.7 设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x+3y\leq 3, \\ x-y\geq 1, \\ y\geq 0, \end{cases}$ 则 $z=x+y$ 的最大值为

   A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

3. 16-2.14 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y+1\geq 0,\\ x+y-3\geq 0,\\ x-3\leq 0.\end{cases}$ 则 $z=x-2y$ 的最小值为__________.

4. 13-1.14 设 x,y 满足条件 $\begin{cases} 1\leq x\leq 3,\\ -1\leq x-y\leq 0.\end{cases}$ 则 $z=2x-y$ 的最大值是__________.

5. 17-3.5 设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} 3x+2y-6\leq 0,\\ x\geq 0,\\ y\geq 0,\end{cases}$ 则 $z=x-y$ 的取值范围是

   A. $[-3,0]$　　B. $[-3,2]$　　C. $[0,2]$　　D. $[0,3]$

6. 12.5 已知正三角形 ABC 的顶点 $A(1,1),B(1,3)$, 顶点 C 在第一象限，若点 (x,y) 在 $\triangle ABC$ 内部，则 $z=-x+y$ 的取值范围是

   A. $(1-\sqrt{3},2)$　　B. $(0,1+\sqrt{3})$　　C. $(\sqrt{3}-1,2)$　　D. $(0,2)$

5.2.3 ✍ 实战演练

1. 16-3.13 设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x-y+1\geq 0,\\ x-2y-1\leq 0,\\ x\leq 1.\end{cases}$ 则 $z=2x+3y-5$ 的最小值为__________.

2. 15-2.14 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-5\leqslant 0,\\ 2x-y-1\geqslant 0,\\ x-2y+1\leqslant 0.\end{cases}$ 则 $z=2x+y$ 的最大值为__________.

3. 15-1.15 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-2\leqslant 0,\\ x-2y+1\leqslant 0,\\ 2x-y+2\geqslant 0.\end{cases}$ 则 $z=3x+y$ 的最大值为__________.

4. 14-2.9 设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-1\geqslant 0,\\ x-y-1\leqslant 0,\\ x-3y+3\geqslant 0.\end{cases}$ 则 $z=x+2y$ 的最大值为

   A. 8　　B. 7　　C. 2　　D. 1

5. 13-2.3 设 x,y 满足条件 $\begin{cases} x-y+1\geq 0,\\ x+y-1\geq 0,\\ x\leq 3.\end{cases}$ 则 $z=2x-3y$ 的最小值是

   A. -7　　B. -6　　C. -5　　D. -3

6. 11.14 设变量 x,y 满足条件 $\begin{cases} 3\leq 2x+y\leq 9,\\ 6\leq x-y\leq 9.\end{cases}$ 则 $z=x+2y$ 的最小值是__________.

7. 10.11 已知 $\square ABCD$ 的三个顶点为 $A(-1,2),B(3,4),C(4,-2)$, 点 (x,y) 在 $\square ABCD$ 的内部，则 $z=2x-5y$ 的取值范围是

A. $(-14,16)$　　B. $(-14,20)$　　C. $(-12,18)$　　D. $(-12,20)$

8. 14-1.11 设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\geq a, \\ x-y\leq -1. \end{cases}$ 且 $z=x+ay$ 的最小值为 7，则 $a=$

A. -5　　B. 3　　C. $-5\vee 3$　　D. $5\vee -3$

9. 16-1.16 某高科技企业生产产品 A 和产品 B 需要甲、乙两种新型材料. 生产一件产品 A 需要甲材料 1.5 kg, 乙材料 1 kg, 用 5 个工时; 生产一件产品 B 需要甲材料 0.5 kg, 乙材料 0.3 kg, 用 3 个工时. 生产一件产品 A 的利润为 2100 元, 生产一件产品 B 的利润为 900 元. 该企业现有甲材料 150 kg, 乙材料 90 kg, 则在不超过 600 个工时的条件下, 生产产品 A, 产品 B 的利润之和的最大值为__________ 元.

5.3　基本不等式 (题略)

✌ 基础提示

1. $a^2+b^2\geq 2ab$
2. $a+b\geq 2\sqrt{ab}$
3. $ab\leq (\dfrac{a+b}{2})^2$
4. 一正 (同) 二定三相等

6 立体几何

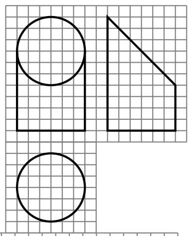
6.1 三视图

6.1.1 ✌ 基础提示

1. 基本几何体的三视图
2. 一般情况下, 俯视图即为 (或少许调整)? 正: 左 (右) 高? 侧: 前 (后) 高? 体积只需??
3. 构造规则几何体 (正方体, 长方体, 球体, 圆柱和圆锥), 截
4. 空间直角 (des Cartes) 坐标系, $d_{AB}=$?

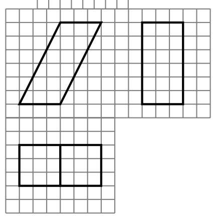
6.1.2 ☞ 典例剖析

1. 17-2.6 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗实线画出的是某几何体的三视图, 该几何体由一平面将一圆柱截去一部分后所得. 则该几何体的体积为



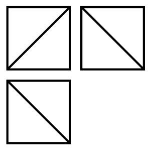
   A. 90π B. 63π C. 42π D. 36π

2. 16-3.10 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗实线画出的是某多面体的三视图, 则该多面体的表面积为



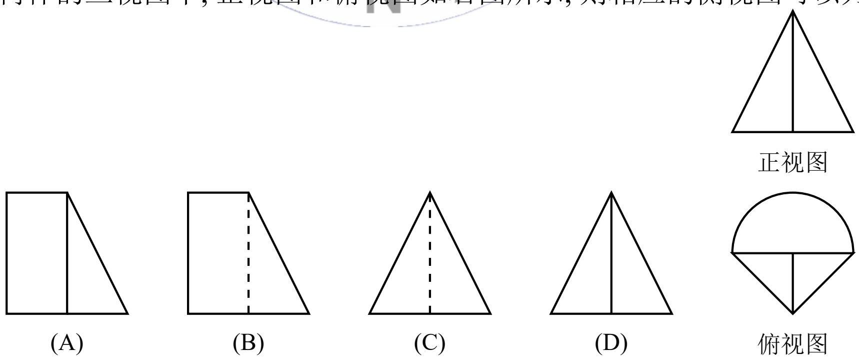
   A. $18+36\sqrt{5}$ B. $54+18\sqrt{5}$ C. 90 D. 81

3. 15-2.6 一个正方体被一个平面截去一部分后, 剩余部分的三视图如右图, 则截去部分体积与剩余部分体积的比值为



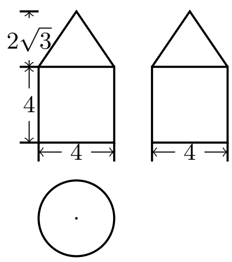
   A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{7}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{5}$

4. 11.8 在一个几何体的三视图中, 正视图和俯视图如右图所示, 则相应的侧视图可以为



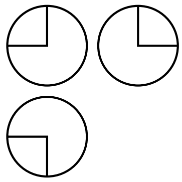
6.1.3 ✍ 实战演练

1. 16-2.7 右图是由圆柱和圆锥组合而成的几何体的三视图, 则该几何体的表面积为



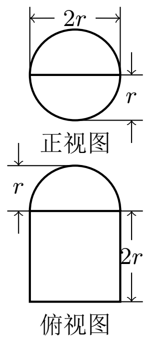
   A. 20π B. 24π C. 28π D. 32π

2. 16-1.7 如图, 某几何体的三视图是三个半径相等的圆及每个圆中两条互相垂直的半径. 若该几何体的体积是 $\dfrac{28\pi}{3}$, 则它的表面积是



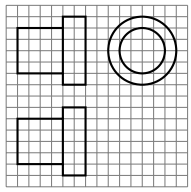
A. 17π　　B. 18π　　C. 20π　　D. 28π

3. 15-1.11 圆柱被一个平面截去一部分后与半球（半径为 r ）组成一个几何体, 该几何体三视图中的正视图和俯视图如图所示. 若该几何体的表面积为 $16+20\pi$, 则 $r=$



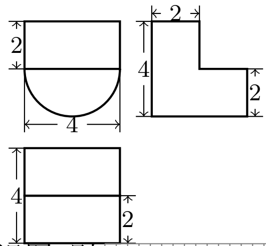
A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

4. 14-2.6 如图, 网格纸上正方形小格的边长为 1（表示 1 cm）, 图中粗线画出的是某零件的三视图, 该零件由一个底面半径为 3 cm, 高为 6 cm 的圆柱体毛坯切削得到, 则切削掉部分的体积与原来毛坯体积的比值为



A. $\dfrac{17}{27}$　　B. $\dfrac{5}{9}$　　C. $\dfrac{10}{27}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

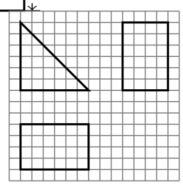
5. 13-1.11 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为



A. $16+8\pi$　　B. $8+8\pi$

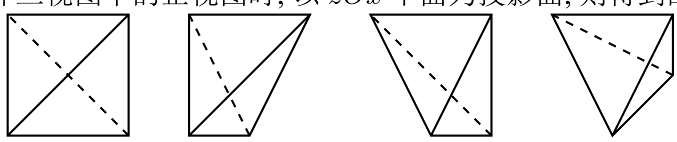
C. $16+16\pi$　　D. $8+16\pi$

6. 14-1.8 如图, 网格纸的各小格都是正方形, 粗实线画出的是一个几何体的三视图, 则这个几何体是



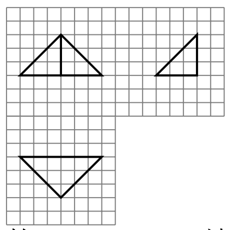
A. 三棱锥　　B. 三棱柱　　C. 四棱锥　　D. 四棱柱

7. 13-2.9 一个四面体的定点在空间直角坐标系 O-xyz 中的坐标分别是 $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(0,0,0)$, 画出该四面体三视图中的正视图时, 以 zOx 平面为投影面, 则得到的正视图可以为



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

8. 12.7 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗线画出的是某几何体的三视图, 则此几何体的体积为



A. 6　　B. 9　　C. 12　　D. 18

9. 10.15 一个几何体的正视图为一个三角形, 则这个几何体可能是下列几何体中的__________.(填入所有可能的几何体前的编号)

①三棱锥　②四棱锥　③三棱柱　④四棱柱　⑤圆锥　⑥圆柱

6.2　体积表面积和垂直平行

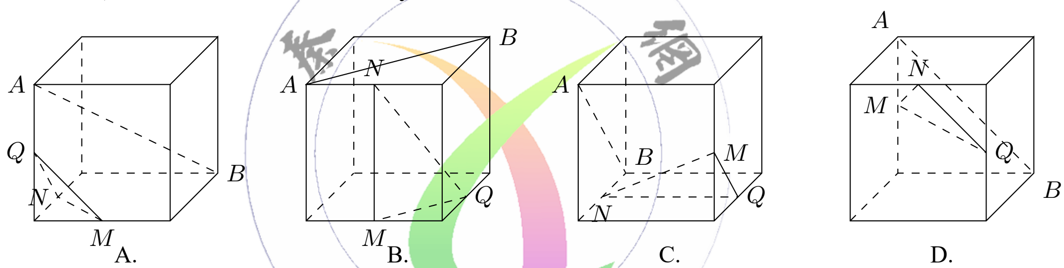
6.2.1　✌ 基础提示

1. $V_{柱}$, $V_{锥}$, $V_{球}$, $S_{柱}$, $S_{锥}$ & $S_{球}$
2. 球体化为平面图; 球内接长方体 (或三棱柱) 类似于圆内接矩形 (或三角形)
3. $\perp$: 直角 (或勾股定理逆定理) $\to$ 线线垂直 $\rightleftharpoons$ 线面垂直 $\rightleftharpoons$ 面面垂直
4. //: （中位线, 传递）线线平行 $\rightleftharpoons$ 线面平行 $\rightleftharpoons$ 面面平行
5. 几何体的直观图中平行会变? 垂直会变?
6. 等体积法

6.2.2　☞ 典例剖析

1. 17-2.15 长方体的长、宽、高分别为 $3, 2, 1$, 其顶点都在球 O 的球面上, 则球 O 的表面积为________.
2. 17-3.10 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为棱 CD 的中点, 则

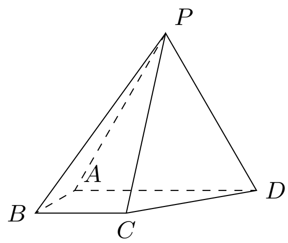
   A. $A_1E \perp DB_1$　　B. $A_1E \perp BD$　　C. $A_1E \perp BC_1$　　D. $A_1E \perp AC$
3. 17-1.6 如图, 在下列四个正方体中, A, B 为正方体的两个顶点, M, N, Q 为所在棱的中点, 则在这四个正方体中, 直线 AB 与平面 MNQ 不平行的是



4. 17-2.18 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 $ABCD$, $AB = BC = \frac{1}{2}AD$, $\angle BAD = \angle ABC = 90°$.

   (I) 证明: 直线 BC // 平面 PAD;

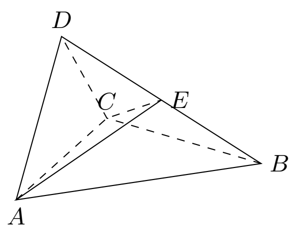
   (II) 若 $\triangle PCD$ 的面积为 $2\sqrt{7}$, 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



5. 17-3.19 如图, 四面体 $ABCD$ 中, $\triangle ABC$ 是正三角形, $AD = CD$.

   (I) 证明: $AC \perp BD$;

   (II) 已知 $\triangle ACD$ 是直角三角形, $AB = BD$. 若 E 为棱 BD 上与 D 不重合的点, 且 $AE \perp EC$, 求四面体 $ABCE$ 与四面体 $ACDE$ 的体积比.



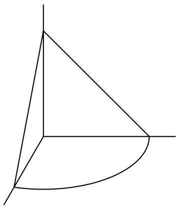
6.2.3　✍ 实战演练

1. 16-3.11 在封闭的直三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 内有一个体积为 V 的球. 若 $AB \perp BC$, $AB = 6$, $BC = 8$, $AA_1 = 3$, 则 V 的最大值是

   A. 4π　　B. $\frac{9\pi}{2}$　　C. 6π　　D. $\frac{32\pi}{3}$
2. 17-3.9 已知圆柱的高为 1, 它的两个底面的圆周在直径为 2 的同一个球面上, 则该圆柱的体积为

A. π　　B. $\frac{3\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{\pi}{4}$

3. 15-1.6 《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著, 书中有如下问题:“今有委米依垣内角, 下角八尺, 高五尺. 问：积及为米几何？”其意思为:“在屋内墙角处堆放米（如图, 米堆为一个圆锥的四分之一）, 米堆底部的弧长为八尺, 米堆的高为五尺, 问米堆的体积和堆放的米各为多少？”已知 1 斛米的体积约为 1.62 立方尺, 圆周率约为 3, 估算出米约有



A. 14 斛　　B. 22 斛　　C. 36 斛　　D. 66 斛

4. 14-2.7 正三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 的底面边长为 2, 侧棱长为 $\sqrt{3}$, D 为 BC 中点, 则三棱锥 A-B_1DC_1 的体积为

A. 3　　B. $\frac{3}{2}$　　C. 1　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. 17-1.16 已知三棱锥 $S-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上, SC 是球 O 的直径. 若平面 $SCA\perp$ 平面 SCB, $SA=SC$, $SB=BC$, 三棱锥 $S-ABC$ 的体积为 9, 则球 O 的表面积为________.

6. 16-2.4 体积为 8 的正方体的顶点都在同一个球面上, 则该球面的表面积为

A. 12π　　B. $\frac{32}{3}\pi$　　C. 8π　　D. 4π

7. 15-2.10 已知 A, B 是球 O 的球面上两点, $\angle AOB=90^\circ$, C 为该球面上的动点. 若三棱锥 O-ABC 体积的最大值为 36, 则球 O 的表面积为

A. 36π　　B. 64π　　C. 144π　　D. 256π

8. 13-2.15 已知正四棱锥 O-$ABCD$ 的体积为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, 底面边长为 $\sqrt{3}$, 则以 O 为球心, OA 为半径的球的表面积为__________.

9. 13-1.15 已知 H 是球 O 的直径 AB 上一点, $AH:HB=1:2$, $AB\perp$ 平面 α, H 为垂足, α 截球 O 所得截面的面积为 π, 则球 O 的表面积为__________.

10. 12.8 平面 α 截球 O 的球面所得圆的半径为 1, 球心 O 到平面 α 的距离为 $\sqrt{2}$, 则此球的体积为

A. $\sqrt{6}\pi$　　B. $4\sqrt{3}\pi$　　C. $4\sqrt{6}\pi$　　D. $6\sqrt{3}\pi$

11. 10.7 设长方体的长、宽、高分别为 $2a, a, a$, 其顶点都在一个球面上, 则该球的表面积为

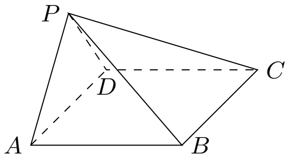
A. $3\pi a^2$　　B. $6\pi a^2$　　C. $12\pi a^2$　　D. $24\pi a^2$

12. 11.16 已知两个圆锥有公共底面, 且两圆锥的顶点和底面圆周都在同一个球面上. 若圆锥底面面积是这个球面面积的 $\frac{3}{16}$, 则这两个圆锥中, 体积较小者的高与体积较大者的高的比值为__________.

13. 16-1.11 平面 α 过正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 A, α // 平面 CB_1D_1, $\alpha\cap$ 平面 $ABCD=m$, $\alpha\cap$ 平面 $ABB_1A_1=n$, 则 m, n 所成角的正弦值为

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

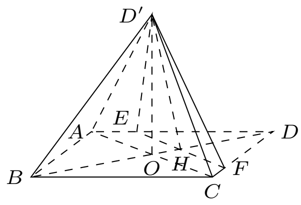
14. 17-1.18 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, AB // CD, 且 $\angle BAP=\angle CDP=90^\circ$.



(I) 证明: 平面 $PAB\perp$ 平面 PAD;

(II) 若 $PA=PD=AB=DC$, $\angle APD=90^\circ$, 且四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $\frac{8}{3}$, 求该四棱锥的侧面积.

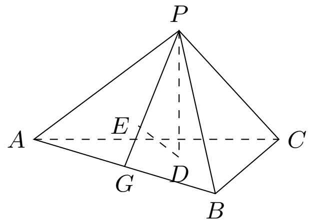
15. 16-2.19 如图, 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O, 点 E,F 分别在 AD,CD 上, $AE=CF$, EF 交 BD 与点 H. 将 $\triangle DEF$ 沿 EF 折到 $D'EF$ 的位置.



(I) 证明: $AC\perp HD'$;

(II) 若 $AB=5$, $AC=6$, $AE=\dfrac{5}{4}$, $OD'=2\sqrt{2}$, 求五棱锥 D'-$ABCFE$ 的体积.

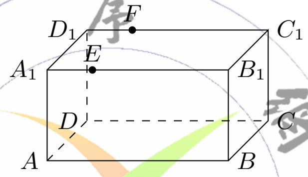
16. 16-1.18 如图, 已知正三棱锥 P-ABC 的侧面是直角三角形, $PA=6$. 顶点 P 在平面 ABC 内的正投影为点 D, D 在平面 PAB 内的正投影为点 E, 连结 PE 并延长交 AB 与点 G.



(I) 证明: G 是 AB 的中点;

(II) 作出点 E 在平面 PAC 内的正投影 F (说明做法及理由), 并求四面体 $PDEF$ 的体积.

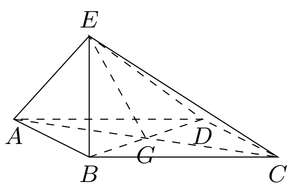
17. 15-2.19 如图, 长方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=16$, $BC=10$, $AA_1=8$, 点 E,F 分别在 A_1B_1, D_1C_1 上, $A_1E=D_1F=4$. 过点 E,F 的平面 α 与此长方体的面相交, 交线围成一个正方形.



(I) 在图中画出这个正方形（不必说明画法和理由）;

(II) 求平面 α 把该长方体分成的两部分提及的比值.

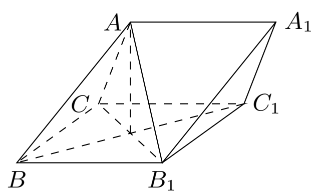
18. 15-1.18 如图, 四边形 $ABCD$ 为菱形, G 为 AC 与 BD 的交点, $BE\perp$ 平面 $ABCD$.



(I) 证明：平面 $AEC\perp$ 平面 BED;

(II) 若 $\angle ABC=120^\circ$, $AE\perp EC$, 三棱锥 E-ACD 的体积为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, 求该三棱锥的侧面积.

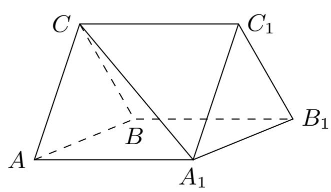
19. 14-1.19 如图, 三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中, 侧面 BB_1C_1C 为菱形, B_1C 的中点为 O, 且 $AO\perp$ 平面 BB_1C_1C.



(I) 证明：$B_1C\perp AB$;

(II) 若 $AC\perp AB_1$, $\angle CBB_1=60^\circ$, $BC=1$, 求三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 的高.

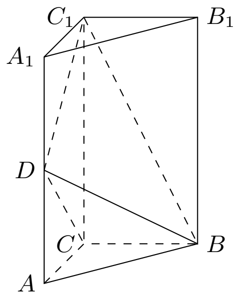
20. 13-1.19 如图, 三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中, $CA=CB$, $AB=AA_1$, $\angle BAA_1=60^\circ$.



(I) 证明：$AB\perp A_1C$;

(II) 若 $AB=CB=2$, $A_1C=\sqrt{6}$, 求三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 的体积.

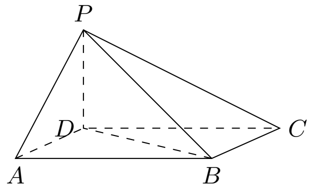
21. 12.19 如图, 在三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中, 侧棱垂直底面, $\angle ACB = 90°$, $AC = BC = \frac{1}{2}AA_1$, D 是棱 AA_1 的中点.



(I) 证明：平面 $BDC_1 \perp$ 平面 BDC；

(II) 平面 BDC_1 分此棱柱为两部分, 求这两部分体积的比.

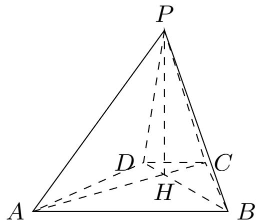
22. 11.18 如图, 四棱锥 P-$ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, $\angle DAB = 60°$, $AB = 2AD$, $PD \perp$ 平面 $ABCD$.



(I) 证明：$PA \perp BD$；

(II) 设 $PD = AD = 1$, 求棱锥 D-PBC 的高.

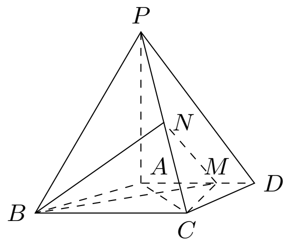
23. 10.18 如图, 已知四棱锥 P-$ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为等腰梯形, $AB \parallel CD$, $AC \perp BD$, 垂足为 H, PH 是四棱锥的高.



(I) 证明：平面 $PAC \perp$ 平面 PBD；

(II) 若 $AB = \sqrt{6}$, $\angle APB = \angle ADB = 60°$, 求四棱锥 P-$ABCD$ 的体积.

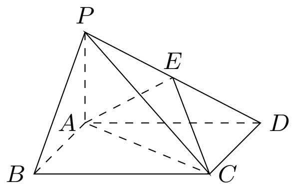
24. 16-3.19 如图, 四棱锥 P-$ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AB = AD = AC = 3$, $PA = BC = 4$, M 为线段 AD 上一点, $AM = 2MD$, N 为 PC 的中点.



(I) 证明：$MN \parallel$ 平面 PAB；

(II) 求四面体 N-BCM 的体积.

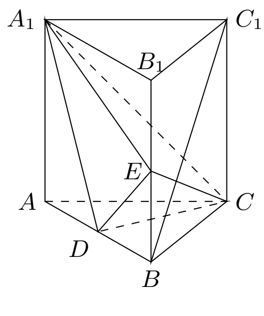
25. 14-2.18 如图, 四棱锥 P-$ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, E 为 PD 的中点.



(I) 证明：$PB \parallel$ 平面 AEC；

(II) 设 $AP = 1$, $AD = \sqrt{3}$, 三棱锥 P-ABD 的体积 $V = \frac{\sqrt{3}}{4}$, 求 A 到平面 PBC 的距离.

26. 13-2.18 如图, 直三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中, D, E 分别是 AB, BB_1 的中点.



(I) 证明：$BC_1 \parallel$ 平面 A_1CD；

(II) 设 $AA_1 = AC = CB = 2$, $AB = 2\sqrt{2}$, 求三棱锥 C-A_1DE 的体积.

7 平面解析几何

7.0.1 ✌ 基础提示

1. 曲线与方程; d_{AB}
2. 直线：倾斜角 α, 斜率 k 和方程
3. 圆的基本性质
4. 抛物线的基本性质
5. 椭圆的基本性质
6. 双曲线的基本性质
7. 直线与圆锥曲线的关系：相交 (Δ, 焦点弦, 中点弦和弦长), 相切 (已知点是否在曲线上) 和特殊三角形
8. 直线和圆——d
9. 抛物线定义和焦准距; 椭圆定义、通径和 e ; 双曲线渐近线和 e

7.0.2 ☞ 典例剖析

1. 17-2.12 过抛物线 $C\colon y^2=4x$ 的焦点 F, 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交 C 于点 M (M 在 x 轴的上方), ℓ 为 C 的准线. 又 N 在 ℓ 上且 $MN\perp\ell$, 则 M 到直线 NF 的距离为
   A. $\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $3\sqrt{3}$
2. 17-3.11 已知椭圆 $C\colon \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2, 且以线段 A_1A_2 为直径的圆与直线 $bx-ay+2ab=0$ 相切, 则 C 的离心率为
   A. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ D. $\dfrac{1}{3}$
3. 17-1.5 已知 F 是双曲线 $C\colon x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左焦点, P 是 C 上一点, 且 PF 与 x 轴垂直, 点 A 的坐标是 $(1,3)$, 则 $\triangle APF$ 的面积为
   A. $\dfrac{1}{3}$ B. $\dfrac{1}{2}$ C. $\dfrac{2}{3}$ D. $\dfrac{3}{2}$
4. 17-1.20 设 A,B 为曲线 $C\colon y=\dfrac{x^2}{4}$ 上两点, A 与 B 的横坐标之和为 4.
   (I) 求直线 AB 的斜率;
   (II) 设 M 曲线 C 上一点, C 在 M 处的切线与直线 AB 平行, $AM\perp BM$, 求直线 AB 的方程.

5. 15-1.20 已知过点 $A(0,1)$ 且斜率为 k 的直线 l 与圆 $C:(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 交于 M,N 两点.
   (I) 求 k 的取值范围;
   (II) 若 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=12$, 其中 O 为坐标原点, 求 $|MN|$.

6. 17-2.20 设 O 为坐标原点, 动点 M 在椭圆 $C\colon \dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 上, 过 M 作 x 轴的垂线, 垂足为 N, 点 P 满足 $\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$.
   (I) 求点 P 的轨迹方程;
   (II) 设点 Q 在直线 $x=-3$ 上, 且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$. 证明: 过点 P 且垂直于 OQ 的直线 ℓ 过 C 的左焦点 F.

7.0.3 ✍ 实战演练

1. 16-2.5 设 F 为抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点, 曲线 $y=\frac{k}{x}\,(k>0)$ 与 C 交于点 P, $PF\perp x$ 轴, 则 $k=$

   A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

2. 14-2.10 设 F 为抛物线 $C: y^2=3x$ 的焦点, 过 F 且倾斜角为 30° 的直线交 C 于 A,B 两点, 则 $|AB|=$

   A. $\frac{\sqrt{30}}{3}$ B. 6 C. 12 D. $7\sqrt{3}$

3. 14-1.10 已知抛物线 $C: y^2=x$ 的焦点为 F, $A(x_0,y_0)$ 是 C 上一点, $|AF|=\frac{5}{4}x_0$, 则 $x_0=$

   A. 1 B. 2 C. 4 D. 8

4. 13-2.10 设抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 F, 直线 l 过 F 且与 C 交于 A,B 两点. 若 $|AF|=3|BF|$, 则 l 的方程为

   A. $y=\pm(x-1)$ B. $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$ C. $y=\pm\sqrt{3}(x-1)$ D. $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$

5. 13-1.8 O 为坐标原点, F 为抛物线 $C: y^2=4\sqrt{2}x$ 的焦点, P 为 C 上一点, 若 $|PF|=4\sqrt{2}$, 则 $\triangle POF$ 的面积为

   A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. 4

6. 11.9 已知直线 l 过抛物线 C 的焦点, 且与 C 的对称轴垂直, l 与 C 交于 A,B 两点, $|AB|=12$, P 为 C 的准线上一点, 则 $\triangle ABP$ 的面积为

   A. 18 B. 24 C. 36 D. 48

7. 16-2.6 圆 $x^2+y^2-2x-8y+13=0$ 的圆心到直线 $ax+y-1=0$ 的距离为 1, 则 $a=$

   A. $-\frac{4}{3}$ B. $-\frac{3}{4}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

8. 16-3.15 已知直线 $l: x-\sqrt{3}y+6=0$ 与圆 $x^2+y^2=12$ 交于 A,B 两点, 过 A,B 分别作 l 的垂线与 x 交于 C,D 两点. 则 $|CD|=$__________.

9. 16-1.15 设直线 $y=x+2a$ 与圆 $C: x^2+y^2-2ay-2=0$ 相交于 A,B 两点, 若 $|AB|=2\sqrt{3}$, 则圆 C 的面积为________.

10. 15-2.7 已知三点 $A(1,0),B(0,\sqrt{3}),C(2,\sqrt{3})$, 则 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心到原点的距离为

    A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{\sqrt{21}}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{4}{3}$

11. 10.13 圆心在原点且与直线 $x+y-2=0$ 相切的圆的方程为__________.

12. 14-2.12 设点 $M(x_0,1)$, 若在圆 $x^2+y^2=1$ 上存在点 N, 使得 $\angle OMN=45^\circ$, 则 x_0 的取值范围是

    A. $[-1,1]$ B. $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ C. $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ D. $[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$

13. 16-1.5 直线 l 经过椭圆的一个顶点和一个焦点, 若椭圆中心到 l 的距离为其短轴长的 $\frac{1}{4}$, 则该椭圆的离心率为

    A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

14. 17-1.12 设 A,B 是椭圆 C: $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{m}=1$ 长轴的两个端点. 若 C 上存在点 M 满足 $\angle AMB=120^\circ$, 则 m 的取值范围是

    A. $(0,1]\cup[9,+\infty)$ B. $(0,\sqrt{3}]\cup[9,+\infty)$ C. $(0,1]\cup[4,+\infty)$ D. $(0,\sqrt{3}]\cup[4,+\infty)$

15. 16-3.12 已知 O 为坐标原点, F 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点. A,B 分别为 C 的左, 右顶点. P 为 C 上一点, 且 $PF\perp x$ 轴. 过点 A 的直线 l 与线段 PF 交于点 M, 与 y 轴交于点 E. 若直线 BM 经过 OE 的中点, 则 C 的离心率为

    A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

16. 15-1.5 已知椭圆 E 的中心在坐标原点, 离心率为 $\frac{1}{2}$, E 的右焦点与抛物线 $C: y^2=8x$ 的焦点重

合，A,B 是 C 的准线与 E 的两个交点，则 $|AB|=$

A. 3　　B. 6　　C. 9　　D. 12

17. 13-2.5 设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1,F_2, P 是 C 上的点, $PF_2\perp F_1F_2$, $\angle PF_1F_2=30^\circ$, 则 C 的离心率为

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

18. 12.4 设 F_1,F_2 是椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点, P 为直线 $x=\dfrac{3a}{2}$ 上一点, $\triangle F_2PF_1$ 是底角为 30° 的等腰三角形, 则 E 的离心率为

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{3}{4}$　　D. $\dfrac{4}{5}$

19. 11.4 椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{8}=1$ 的离心率为

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

20. 17-3.14 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{9}=1\,(a>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=\dfrac{3}{5}x$, 则 $a=$________.

21. 17-2.5 若 $a>1$, 则双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1$ 的离心率的取值范围是

A. $(\sqrt{2},+\infty)$　　B. $(\sqrt{2},2)$　　C. $(1,\sqrt{2})$　　D. $(1,2)$

22. 15-2.15 已知双曲线过点 $(4,\sqrt{3})$, 且渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{1}{2}x$, 则该双曲线的标准方程为__________.

23. 14-1.4 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{3}=1(a>0)$ 的离心率为 2, 则 $a=$

A. 2　　B. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　D. 1

24. 13-1.4 已知双曲线的 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, 则 C 的渐近线方程为

A. $y=\pm\dfrac{1}{4}x$　　B. $y=\pm\dfrac{1}{3}x$　　C. $y=\pm\dfrac{1}{2}x$　　D. $y=\pm x$

25. 12.10 等轴双曲线 C 的中心在原点, 焦点在 x 轴上, C 与抛物线 $y^2=16x$ 的准线交于 A,B 两点, $|AB|=4\sqrt{3}$, 则 C 的实轴长为

A. $\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 4　　D. 8

26. 10.5 中心在原点, 焦点在 x 轴上的双曲线的一条渐近线经过点 $(4,-2)$, 则它的离心率为

A. $\sqrt{6}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

27. 15-1.16 已知 F 是双曲线 $C:x^2-\dfrac{y^2}{8}=1$ 的右焦点, P 是 C 的左支上一点, $A(0,6\sqrt{6})$. 当 $\triangle APF$ 周长最小时, 该三角形的面积为__________.

28. 17-3.20 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 $y=x^2+mx-2$ 与 x 轴交于 A,B 两点, 点 C 的坐标为 $(0,1)$. 当 m 变化时, 解答下列问题:

(I) 能否出现 $AC\perp BC$ 的情况? 说明理由;

(II) 证明过 A,B,C 三点的圆在 y 轴上截得的弦长为定值.

29. 16-3.20 已知抛物线 $C:y^2=2x$ 的焦点为 F, 平行于 x 轴的两条直线 l_1,l_2 分别交 C 于 A,B 两点, 交 C 的准线于 P,Q 两点.

(I) 若 F 在线段 AB 上, R 是 PQ 的中点, 证明 $AR\parallel FQ$;

(II) 若 $\triangle PQF$ 的面积是 $\triangle ABF$ 的面积的两倍, 求 AB 中点的轨迹方程.

30. 16-1.20 在直角坐标系 xOy 中, 直线 $l:y=t(t\neq 0)$ 交 y 轴于点 M, 交抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 于点 P. M 关于点 P 的对称点为 N, 连结 ON 并延长交 C 于点 H.

(I) 求 $\dfrac{|OH|}{|ON|}$；

(II) 除 H 以外, 直线 MH 与 C 是否有其它公共点？说明理由.

31. 11.20 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 $y=x^2-6x+1$ 与坐标轴的交点都在圆 C 上.

(I) 求圆 C 的方程;

(II) 若圆 C 与直线 $x-y+a=0$ 交于 A,B 两点, 且 $OA\perp OB$, 求 a 的值.

32. 12.20 设抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F, 准线为 l, A 为 C 上一点, 已知以 F 为圆心, FA 为半径的圆 F 交 l 于 B,D 两点.

(I) 若 $\angle BFD=90^\circ$, $\triangle ABD$ 的面积为 $4\sqrt{2}$, 求 p 的值及圆 F 的方程;

(II) 若 A,B,F 三点在同一直线 m 上, 直线 n 与 m 平行, 且 n 与 C 只有一个公共点, 求坐标原点到 m,n 距离的比值.

33. 13-2.20 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆 P 在 x 轴上截得线段长为 $2\sqrt{2}$, 在 y 轴上截得线段长为 $2\sqrt{3}$.

(I) 求圆心 P 的轨迹方程;

(II) 若 P 点到直线 $y=x$ 的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 求圆 P 的方程.

34. 14-1.20 已知点 $P(2,2)$, 圆 $C:x^2+y^2-8y=0$, 过点 P 的动直线 l 与圆 C 交于 A,B 两点, 线段 AB 的中点为 M, O 为坐标原点.

(I) 求 M 的轨迹方程;

(II) 当 $|OP|=|OM|$ 时, 求 l 的方程及 $\triangle POM$ 的面积.

35. 13-1.21 已知圆 $M:(x+1)^2+y^2=1$, 圆 $N:(x-1)^2+y^2=9$, 动圆 P 与圆 M 外切并且与圆 N 内切, 圆心 P 的轨迹为曲线 C.

(I) 求 C 的方程;

(II) l 是与圆 P, 圆 M 都相切的一条直线, l 与曲线 C 交于 A,B 两点, 当圆 P 的半径最大时, 求 $|AB|$.

36. 16-2.21 已知 A 是椭圆 $E:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左顶点, 斜率为 $k(k>0)$ 的直线交 E 于 A,M 两点, 点 N 在 E 上, $MA\perp NA$.

(I) 当 $|AM|=|AN|$ 时, 求 $\triangle AMN$ 的面积;

(II) 当 $2|AM|=|AN|$ 时, 证明 $\sqrt{3}<k<2$.

37. 15-2.20 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 点 $(2,\sqrt{2})$ 在 C 上.

(I) 求 C 的方程;

(II) 直线 l 不过原点 O 且不平行于坐标轴, l 与 C 有两个交点 A,B, 线段 AB 的中点为 M. 证明：直线 OM 的斜率与直线 l 的斜率的乘积为定值.

38. 14-2.20 设 F_1,F_2 分别是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点, M 是 C 上一点且 MF_2 与 x 轴垂直, 直线 MF_1 与 C 的另一个交点为 N.

(I) 若直线 MN 的斜率为 $\dfrac{3}{4}$, 求 C 的离心率;

(II) 若直线 MN 在 y 轴上的截距为 2, 且 $|MN| = 5|F_1N|$, 求 a, b.

39. 10.20 设 F_1, F_2 分别是椭圆 $E: x^2 + \dfrac{y^2}{b^2} = 1(0 < b < 1)$ 的左、右焦点, 过 F_1 的直线 l 与 E 相交于 A, B 两点, 且 $|AF_2|, |AB|, |BF_2|$ 成等差数列.
(I) 求 $|AB|$;
(II) 若直线 l 的斜率为 1, 求 b 的值.

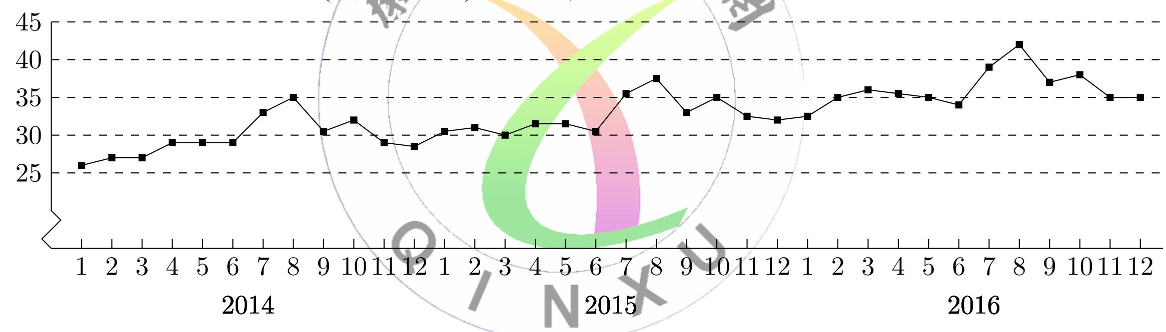
8 统计与概率

8.0.1 ✌ 基础提示

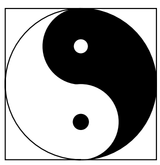
1. 抽样 (方法和原则)
2. 用样本估计总体 (频率分布, 数字特征和图表)
   频率分布直方图, 茎叶图, 密度曲线
   均值, 方差 (标准差), 众数和中位数
3. 变量之间的关系 (函数或相关) 和散点图
4. 线性相关, 相关系数, 线性回归和回归直线; (分类变量) 独立性检验
5. 事件的频率和概率
6. 事件的关系和运算 ($A \subseteq B (\vee B \supseteq A)$, 相互独立, 互斥和对立; $A \cup B, A \cap B$ & $\overline{A}$)
7. 概率的性质 ($P(A \cup B), P(\overline{A})$ & $P(A|B)$)
8. 古典概型与 (整数值) 随机数模拟; 几何概型与均匀随机数模拟
9. 题中会给出 $K^2(\chi^2)$ 检验表格和回归方程系数最小二乘估计公式

8.0.2 ☞ 典例剖析

1. 17-3.3 某城市为了解游客人数的变化规律, 提高旅游服务质量, 收集并整理了 2014 年 1 月至 2016 年 12 月期间月接待游客量 (单位: 万人) 的数据, 绘制了下面的折线图:



   根据该折线图, 下列结论错误的是
   A. 月接待游客量逐月增加
   B. 年接待游客量逐年增加
   C. 各年的月接待游客量高峰期大致在 7,8 月
   D. 隔年 1 月至 6 月的月接待游客量相对于 7 月至 12 月, 波动性更小, 变化比较平稳
2. 17-1.2 为评估一农作物的种植效果, 选了 n 块地作实验田. 这 n 块地的亩产量 (单位: kg) 分别为 $x_1, x_2, \ldots, x_n$, 下面给出的指标中可以用来评估这种农作物亩产量稳定程度的是
   A. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的平均数　　B. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的标准差
   C. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的最大值　　D. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的中位数
3. 17-2.11 从分别写有 1,2,3,4,5 的 5 张卡片中随机抽取 1 张, 放回后在随机抽取 1 张, 则抽得的第一张卡片上的数大于第二张卡片上的数的概率为
   A. $\dfrac{1}{10}$　　B. $\dfrac{1}{5}$　　C. $\dfrac{3}{10}$　　D. $\dfrac{2}{5}$
4. 17-1.4 如图, 正方形 $ABCD$ 内的图形来自中国古代的太极图. 正方形内切圆中的黑色部分和白色部分关于正方形的中心成中心对称. 在正方形内随机取一点, 则此点取自黑色部分的概率是



   A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{\pi}{8}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{\pi}{4}$
5. 17-3.18 某超市计划按月订购一种酸奶, 每天进货量相同, 进货成本每瓶 4 元, 售价每瓶 4 元, 未

售出的酸奶降价处理, 以每瓶 2 元的价格当天全部处理完. 根据往年销售经验, 每天需求量与当天最高气温 (单位: °C) 有关. 如果最高气温不低于 25, 需求量为 500 瓶; 如果最高气温位于区间 $[20,25)$, 需求量为 300 瓶; 如果最高气温低于 20, 需求量为 200 瓶. 为了确定六月份的订购计划, 统计了前三年六月份各天的最高气温数据, 得下面的频数分布表:

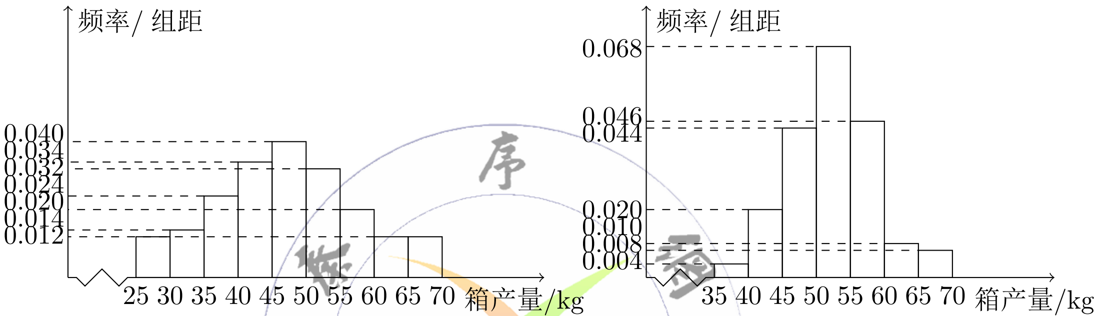
最高气温	$[10,15)$	$[15,20)$	$[20,25)$	$[25,30)$	$[30,35)$	$[35,40)$
天数	2	16	36	25	7	4

以最高气温位于各区间的频率代替最高气温位于该区间的概率.

(I) 估计六月份这种酸奶一天的需求量不超过 300 瓶的概率;

(II) 设六月份一天销售这种酸奶的利润为 Y (单位: 元). 当六月份这种酸奶一天进货量为 450 瓶时, 写出 Y 的所有可能值, 并估计 Y 大于零的概率.

6. 17-2.19 海水养殖场进行某水产品的新、旧网箱养殖方法的产量对比, 收获时个随机抽取了 100 个网箱, 测量各箱水产品的产量 (单位: kg), 其频率分布直方图如下:



旧养殖法　　　　新养殖法

(I) 记 A 表示事件 "旧养殖法的箱产量低于 50 kg ", 估计 A 的概率;

(II) 填写下面列联表, 并根据列联表判断是否有 99% 的把握认为箱产量与养殖方法有关:

	箱产量 $\geq 50\,\mathrm{kg}$	箱产量 $< 50\,\mathrm{kg}$
旧养殖法		
新养殖法		

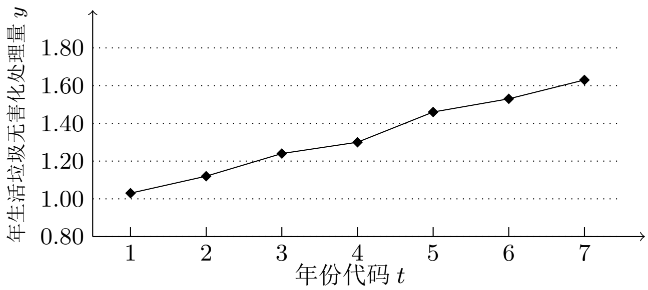
(III) 根据箱产量的频率分布直方图, 对这两种养殖方法的优劣进行比较.

附:

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

7. 16-3.18 下图是我国 2008 年至 2014 年生活垃圾无害化处理量 (单位: 亿吨) 的折线图.



注: 年份代码 1~7 分别对应年份 2008~2014.

(I) 由折线图看出, 可用线性回归模型拟合 y 与 t 的关系, 请用相关系数加以说明;

(II) 建立 y 关于 t 的回归方程 (系数精确到 0.01), 预测 2016 年我国生活垃圾无害化处理量.

附注:

参考数据: $\sum\limits_{i=1}^{7} y_i=9.32$, $\sum\limits_{i=1}^{7} t_iy_i=40.17$, $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{7}(y_i-\overline{y})^2}=0.55$, $\sqrt{7}\approx 2.646$.

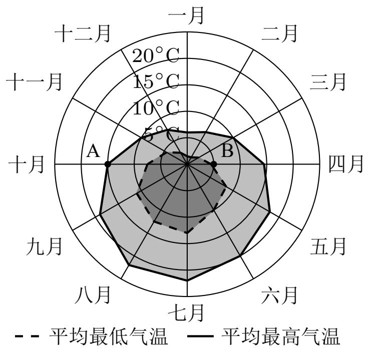
参考公式：相关系数：$r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$

回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}t$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为：

$$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2},\ \hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}$$

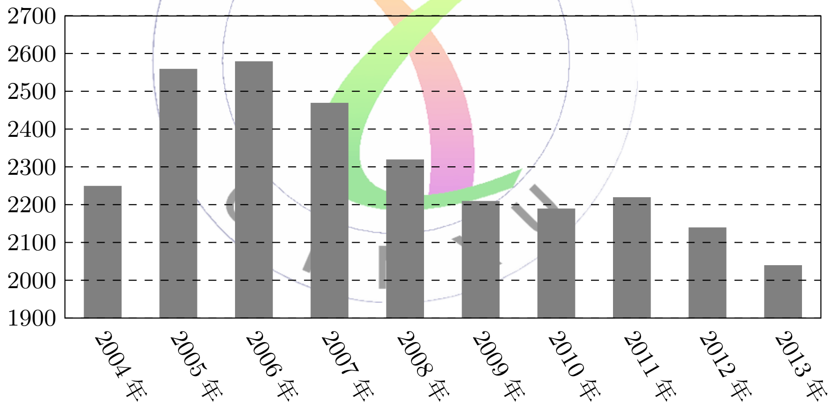
8.0.3 ✍ 实战演练

1. 16-3.4 某旅游城市为向游客介绍本地的气温情况, 绘制了一年中各月平均最高气温和最低气温的雷达图. 图中 A 点表示十月的平均最高气温约为 15°C, B 点表示四月的平均最低气温约为 5°C. 下面叙述不正确的是



A. 各月的平均最低气温都在 0°C 之上
B. 七月的平均温差比一月的平均温差大
C. 三月和十一月的平均最高气温基本相同
D. 平均最高气温高于 20°C 月份有 5 个

2. 15-2.3 根据下面给出的 2004 年至 2013 年我国二氧化硫年排放量（单位：万吨）柱形图, 以下结论不正确的是



A. 逐年比较, 2008 年减少二氧化硫排放量的效果最显著
B. 2007 年我国治理二氧化硫排放显现成效
C. 2006 年以来我国二氧化硫年排放量呈减少趋势
D. 2006 年以来我国二氧化硫排放量与年份正相关

3. 16-3.5 小敏打开计算机时, 忘记了开机密码的前两位, 只记得第一位是 M,I,N 中的一个字母, 第二位 1, 2, 3, 4, 5 中的一个数字, 则小敏输入一次密码能够成功开机的概率是

A. $\frac{8}{15}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{15}$ D. $\frac{1}{30}$

4. 16-1.3 为美化环境, 从红, 黄, 白, 紫 4 种颜色的花中任选 2 种花种在一个花坛中, 余下的 2 种花种在另一个花坛中, 则红色和紫色的花不在同一个花坛的概率是

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{5}{6}$

5. 15-1.4 如果 3 个正整数可作为一个直角三角形三条边的边长, 则称这 3 个数为一组勾股数. 从 1,2,3,4,5 中任取 3 个不同的数, 则这 3 个数构成一组勾股数的概率为

A. $\frac{3}{10}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{10}$ D. $\frac{1}{20}$

6. 14-2.13 甲、乙两名运动员各自等可能地从红、蓝、白 3 种颜色的运动服中选择 1 种, 则他们选择

相同颜色运动服的概率为__________.

7. 14-1.13 将 2 本不同的数学书和 1 本语文书在书架上随机排成一行, 则 2 本数学书相邻的概率为__________.
8. 13-2.13 从 1,2,3,4,5 中任意取出两个不同的数, 其和为 5 的概率是__________.
9. 13-1.3 从 1,2,3,4 中任意取出个 2 不同的数, 则取出的 2 个的数之差的绝对值为 2 的概率是

   A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{6}$
10. 12.3 在一组样本数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)(n \geq 2, x_1, x_2, \cdots, x_n$不全相等) 的散点图中, 若所有样本点 $(x_i, y_i)(i = 1, 2, \cdots, n)$ 都在直线 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 上, 则这组样本数据的样本相关系数为

    A. -1　　B. 0　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1
11. 11.6 有 3 个兴趣小组, 甲、乙两位同学各自参加其中一个小组, 每位同学参加各个小组的可能性相等, 则这两位同学参加同一个兴趣小组的概率为

    A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$
12. 16-2.8 某路口人行横道的信号灯为红色和绿色交替出现, 红灯持续时间为 40 秒. 若一名行人来到该路口遇到红灯, 则至少需要等待 15 秒才出现绿灯的概率为

    A. $\frac{7}{10}$　　B. $\frac{5}{8}$　　C. $\frac{3}{8}$　　D. $\frac{3}{10}$
13. 10.14 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的图象是连续不断的一条曲线, 且恒有 $0 \leq f(x) \leq 1$, 可以用随机模拟方法近似计算由曲线 $y = f(x)$ 及直线 $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ 所围成部分的面积 S. 先产生两组 (每组 N 个) 区间 $[0, 1]$ 上的均匀随机数 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ 和 $y_1, y_2, \cdots, y_N$, 由此得到 N 个点 $(x_i, y_i)(i = 1, 2, \cdots, N)$. 再数出其中满足 $y_i \leq f(x_i)(i = 1, 2, \cdots, N)$ 的点数 N_1, 那么由随机模拟方法可得 S 的近似值为__________.
14. 17-1.19 为了监控某种零件的一条生产线的生产过程, 检验员每隔 30 min 从该生产线上随机抽取一个零件, 并测量其尺寸 (单位: cm). 下面是检验员在一天内抽取的 16 个零件的尺寸:

抽取次序	1	2	3	4	5	6	7	8
零件尺寸	9.95	10.12	9.96	9.96	10.01	9.92	9.98	10.04
抽取次序	9	10	11	12	13	14	15	16
零件尺寸	10.26	9.91	10.13	10.02	9.22	10.04	10.05	9.95

经计算得 $\bar{x} = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} x_i = 9.97$, $s = \sqrt{\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{16}\left(\sum_{i=1}^{16} x_i^2 - 16\bar{x}^2\right)} \approx 0.212$, 其中 x_i 为抽取的第 i 个零件的尺寸, $i = 1, 2, \cdots, 16$.

(I) 求 $(x_i, i)\,(i = 1, 2, \cdots, 16)$ 的相关系数 r, 并回答是否可以认为这一天生产的零件尺寸不随生产过程的进行而系统地变大或变小 (若 $|r| < 0.25$, 则可以认为零件的尺寸不随生产过程的进行而系统地变大或变小);

(II) 一天内抽检零件中, 如果出现了尺寸在 $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$ 之外的零件, 就认为这条生产线在这一天内的生产过程可能出现了异常情况, 需对当天的生产过程进行检查.

(i) 从这一天抽检的结果看, 是否需要对当天的生产过程进行检查?

(ii) 在 $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$ 之外的数据称为离群值, 剔除离群值, 估计这条生产线当天的零件尺寸的均值与标准差. (精确到 0.01)

附: 样本 $(x_i, y_i)\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ 的相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$. $\sqrt{0.008} \approx 0.09$.

15. 16-2.18 某险种的基本保费为 a (单位: 元), 继续购买该险种的投保人成为续保人, 续保人本年度的保费与其上年度出险次数的关联如下:

上年度出险次数	0	1	2	3	4	≥ 5
保　　费	$0.85a$	a	$1.25a$	$1.5a$	$1.75a$	$2a$

随机统计了该险种的 200 名续保人在一年内的出险情况, 得到如下统计表:

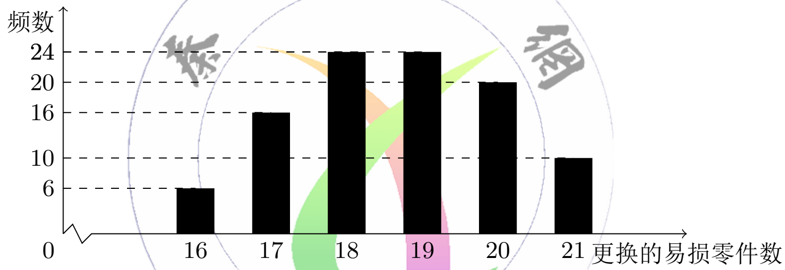
出险次数	0	1	2	3	4	≥ 5
频　数	60	50	30	30	20	10

(I) 记 A 为事件:“一续保人本年度的保费不高于基本保费”. 求 $P(A)$ 的估计值;

(II) 记 B 为事件:“一续保人本年度的保费高于基本保费但不高于基本保费的 160%”. 求 $P(B)$ 的估计值;

(III) 求续保人本年度的平均保费的估计值.

16. 16-1.19 某公司计划购买 1 台机器, 该种机器使用三年后即被淘汰. 机器有一易损零件, 在购进机器时, 可以额外购买这种零件作为备件, 每个 200 元. 在机器使用期间, 如果备件不足再购买, 则每个 500 元. 现需决策在购买机器时应同时购买几个易损零件, 为此收集并整理了 100 台这种机器在三年使用期内更换的易损零件数, 得下面柱状图:



记 x 表示 1 台机器三年使用期内需要更换的易损零件数, y 表示 1 台机器在购买易损零件上所需的费用 (单位：元), n 表示购机的同时购买的易损零件数.

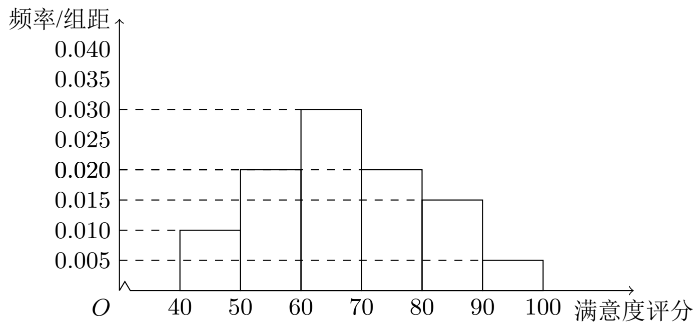
(I) 若 $n=19$, 求 y 关于 x 的函数解析式;

(II) 若要求“需更换的易损零件数不大于 n ”的频率不小于 0.5, 求 n 的最小值;

(III) 假设这 100 台机器在购机的同时每台都购买 19 个易损零件, 或每台都购买 20 个易损零件, 分别计算这 100 台机器在购买易损零件上所需费用的平均值, 以此作为决策依据, 购买 1 台机器的同时应购买 19 个还是 20 个易损零件?

17. 15-2.18 某公司为了解用户对其产品的满意度, 从 A,B 两地区分别随机调查了 40 个用户, 根据用户对产品的满意度评分, 得到 A 地区用户满意度评分的频率分布直方图和 B 地区用户满意度评分的频数分布表.

A 地区用户满意度评分的频率分布直方图

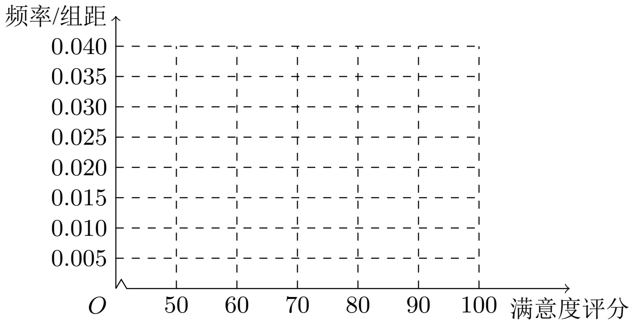


B 地区用户满意度评分的频率分布表

满意度评分分组	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100]
频　数	2	8	14	10	6

(I) 在答题卡上作出 B 地区用户满意度评分的频率分布直方图, 并通过直方图比较两地区满意度评分的平均值及分散程度（不要求计算出具体值, 给出结论即可）;

B 地区用户满意度评分的频率分布直方图

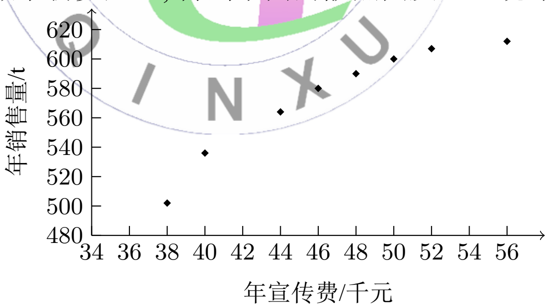


(II) 根据用户满意度评分, 将用户的满意度分为三个等级：

满意度评分	低于 70 分	70 分到 89 分	不低于 90 分
满意度等级	不满意	满意	非常满意

估计哪个地区用户的满意度等级为不满意的概率大? 说明理由.

18. 15-1.19 某公司为确定下一年度投入某种产品的宣传费, 需了解年宣传费 x (单位：千元) 对年销售量 y (单位：t) 和年利润 z (单位：千元) 的影响. 对近 8 年的年宣传费 x_i 和年销售量 $y_i(i=1,2,\cdots,8)$ 数据做了初步处理, 得到下面的散点图及一些统计量的值.



$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{w}$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})^2$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(w_i-\bar{w})^2$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(w_i-\bar{w})(y_i-\bar{y})$
46.6	563	6.8	289.8	1.6	1469	108.8

表中 $w_i=\sqrt{x_i}, \bar{w}=\dfrac{1}{8}\sum\limits_{i=1}^{8} w_i$

(I) 根据散点图判断, $y=a+bx$ 与 $y=c+d\sqrt{x}$ 哪一个更适宜作为年销售量 y 关于年宣传费 x 的回归方程类型?（给出判断即可, 不必说明理由）

(II) 根据 (I) 的判断结果及表中数据, 建立 y 关于 x 的回归方程;

(III) 已知这种产品的年利润 z 与 x,y 的关系为 $z=0.2y-x$. 根据 (II) 的结果回答下列问题：

(i) 年宣传费 $x=49$ 时, 年销售量以及年利润的预报值是多少?

(ii) 年宣传费 x 为何值时, 年利润的预报值最大?

附：对于一组数据 $(u_1,v_1),(u_2,v_2),\cdots,(u_n,v_n)$, 其回归直线 $v=\alpha+\beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为

$$\widehat{\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(u_i-\overline{u})(v_i-\overline{v})}{\sum_{i=1}^{n}(u_i-\overline{u})^2},\widehat{\alpha}=\overline{v}-\widehat{\beta}\overline{u}.$$

19. 14-2.19 某市为了考核甲、乙两部门的工作情况, 随机访问了 50 位市民. 根据这位市民对这两部门的评分（评分越高表明市民的评价越高）, 绘制茎叶图如下：

甲部门		乙部门
	3	59
4	4	0448
97	5	122456677789
9766533210	6	011234688
98877766555554443332100	7	00113449
6655200	8	123345
632220	9	011456
	10	000

(I) 分别估计该市的市民对甲、乙两部门评分的中位数;

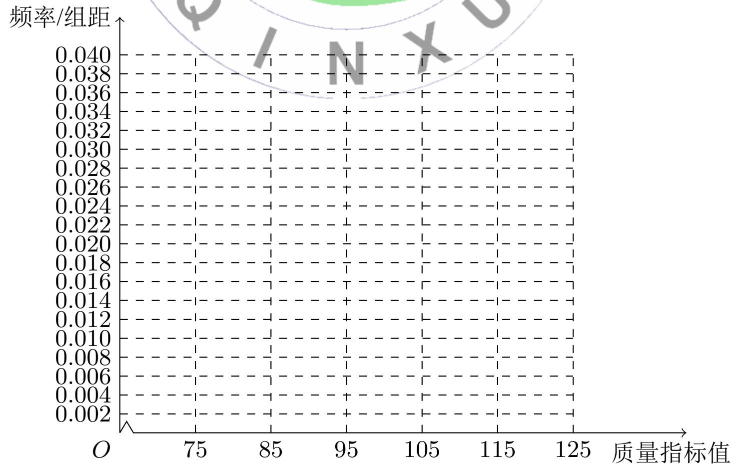
(II) 分别估计该市的市民对甲、乙两部门评分高于 90 的概率;

(III) 根据茎叶图分析该市的市民对甲、乙两部门的评价.

20. 14-1.18 从某企业生产的某种产品中抽取 100 件, 测量这些产品的质量指标值, 由测量结果的如下频数分布表：

质量指标值分组	[75,85)	[85,95)	[95,105)	[105,115)	[115,125)
频数	6	26	38	22	8

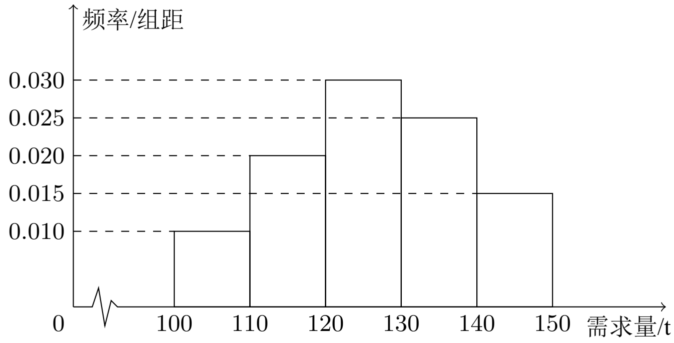
(I) 在下表中作出这些数据的频率分布直方图：



(II) 估计这种产品质量指标值的平均数及方差（同一组中的数据用该组区间的中点值代表）;

(III) 根据以上抽样调查数据, 能否认为该企业生产的这种产品符合“质量指标值不低于 95 的产品至少要占全部产品 80%”的规定?

21. 13-2.19 经销商经销某种农产品, 在一个销售季度内, 每售出 1 t 该产品获利润 500 元, 未售出的产品, 每 1 t 亏损 300 元. 根据历史资料, 得到销售季度内市场需求量的频率分布直方图, 如图所示. 经销商为下一个销售季度购进了 130 t 该农产品. 以 X (单位：t, $100\le X\le 150$) 表示下一个销售季度内的市场需求量, T (单位：元) 表示下一个销售季度内经销该农产品的利润.



(I) 将 T 表示为 X 的函数;

(II) 根据直方图估计利润 T 不少于 5 7000 元的概率.

22. 13-1.18 为了比较两种治疗失眠症的药 (分别称为 A 药, B 药) 的疗效, 随机地选取 20 位患者服用 A 药, 20 位患者服用 B 药, 这 40 位患者在服用一段时间后, 记录他们日平均增加的睡眠时间 (单位：h). 试验的观测结果如下：

服用 A 药的 20 位患者日平均增加的睡眠时间：

0.6 1.2 2.7 1.5 2.8 1.8 2.2 2.3 3.2 3.5 2.5 2.6 1.2 2.7 1.5 2.9 3.0 3.1 2.3 2.4

服用 B 药的 20 位患者日平均增加的睡眠时间：

3.2 1.7 1.9 0.8 0.9 2.4 1.2 2.6 1.3 1.4 1.6 0.5 1.8 0.6 2.1 1.1 2.5 1.2 2.7 0.5

(I) 分别计算两组数据的平均数, 从计算结果看, 哪种药的疗效更好?

(II) 根据两组数据完成下面茎叶图, 从茎叶图看, 哪种药的疗效更好?

A 药		B 药
	0.	
	1.	
	2.	
	3.	

23. 12.18 某花店每天以每枝 5 元的价格从农场购进若干枝玫瑰花, 然后以每枝 10 元的价格出售. 如果当天卖不完, 剩下的玫瑰花作垃圾处理.

(I) 若花店一天购进 17 枝玫瑰花, 求当天的利润 y (单位：元) 关于当天需求量 n (单位：枝, $n \in \mathbf{N}$) 的函数解析式;

(II) 花店记录了 100 天玫瑰花的日需求量 (单位：枝), 整理的下表：

日需求量 n	14	15	16	17	18	19	20
频　　数	10	20	16	16	15	13	10

(i) 假设花店在这 100 天内每天购进 17 枝玫瑰花, 求这 100 天的日利润 (单元：元) 的平均数;

(ii) 若花店一天购进 17 枝玫瑰花, 以 100 天记录的各需求量的频率作为个需求量发生的概率, 求当天的利润不少于 75 元的概率.

24. 11.19 某种产品的质量以其质量指标值衡量, 质量指标值越大表明质量越好, 且质量指标值大于或等于 102 的产品为优等品. 现用两种新配方 (分别称为 A 配方和 B 配方) 做实验, 各生产了 100 件这种产品, 并测量了每件产品的质量指标值, 得到了下面实验结果：

A 配方的频数分布表

指标值分组	[90,94)	[94,98)	[98,102)	[102,106)	[106,110]
频　　数	8	20	42	22	8

B 配方的频数分布表

指标值分组	[90,94)	[94,98)	[98,102)	[102,106)	[106,110]
频　　数	4	12	42	32	10

(I) 分别估计用 A 配方, B 配方生产的产品的优质品率;

(II) 已知用 B 配方生产的一件产品的利润 y (单位：元) 与其质量指标值 t 的关系式为

$$y=\begin{cases}-2, & t<94,\\ 2, & 94\le t<102,\\ 4, & t\ge 102.\end{cases}$$

估计用 B 配方生产的一件产品的利润大于 0 的概率, 并求出用 B 配方生产的上述 100 件产品平均一件的利润.

25. 10.19 为调查某地区老年人是否需要志愿者提供帮助, 用简单随机抽样从该地区调查了 500 位老年人, 结果如下：

性 别		男	女
是否需要志愿者	需要	40	30
	不需要	160	270

(I) 估计该地区老年人中, 需要志愿者提供帮助的老年人的比例;

(II) 能否有 99% 的把握认为该地区的老年人是否需要志愿者提供帮助与性别有关？

(III) 根据 (II) 的结论, 能否提出更好的调查方法来估计该地区的老年人中, 需要志愿者提供帮助的老年人的比例？说明理由.

附：

$P(K^2\ge k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

9 选修 4 系列

9.1 选修 4-4 坐标系与参数方程

9.1.1 ✌ 基础提示

1. 极坐标系 $((\rho,\theta)\rightleftharpoons(x,y))$, d_{AB}
2. 极坐标系下的交点坐标
3. $\theta=\theta_0$, $(\rho\in\mathbb{R})$, $\rho\cos\theta=a$, $\rho\sin\theta=a$, $\rho=r$, $\rho=2a\cos\theta$ & $\rho=2a\sin\theta$
4. $\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha,\\ y=y_0+t\sin\alpha,\end{cases}(t)\rightleftharpoons\begin{cases}x=x_0+as=x_0+(\sqrt{a^2+b^2}s)\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\\ y=y_0+bs=y_0+(\sqrt{a^2+b^2}s)\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\end{cases}(s)(\sqrt{a^2+b^2}s=t)$; t
5. $\begin{cases}x=a+r\cos\theta,\\ y=b+r\sin\theta,\end{cases}(\theta)$; $\begin{cases}x=a\cos\theta,\\ y=b\sin\theta,\end{cases}(\theta)$

9.1.2 ☞ 典例剖析

1. 17-3.22 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 ℓ_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+t,\\ y=kt,\end{cases}$ (t 为参数), 直线 ℓ_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=-2+m,\\ y=\dfrac{m}{k},\end{cases}$ (m 为参数). 设 ℓ_1 与 ℓ_2 的交点为 P, 当 k 变化时, P 的轨迹为曲线 C.
   (I) 写出 C 的普通方程;
   (II) 以坐标原点为极点, x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系, 设 ℓ_3: $\rho(\cos\theta+\sin\theta)-\sqrt{2}=0$, M 为 ℓ_3 与 C 的焦点, 求 M 的极径.

2. 17-2.22 在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta=4$.
   (I) M 为曲线 C_1 上的动点, 点 P 在线段 OM 上, 且满足 $|OM|\cdot|OP|=16$. 求点 P 的轨迹 C_2 的直角坐标方程;
   (II) 设点 A 的极坐标为 $(2,\frac{\pi}{3})$, 点 B 在曲线 C_2 上. 求 $\triangle OAB$ 面积的最大值.

3. 17-1.22 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=3\cos\theta,\\ y=\sin\theta,\end{cases}$ (θ 为参数), 直线 ℓ 的参数方程为 $\begin{cases}x=a+4t,\\ y=1-t,\end{cases}$ (t 为参数).
   (I) 若 $a=-1$, 求 C 与 ℓ 的交点坐标;
   (II) 若 C 上的点到 ℓ 距离的最大值为 $\sqrt{17}$, 求 a.

9.1.3 ✍ 实战演练

1. 16-3.23 在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos\alpha, \\ y=\sin\alpha, \end{cases}$ (α为参数). 以坐标原点为极点，以 x 轴的非负半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})=2\sqrt{2}$.
   (I) 写出 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程；
   (II) 设点 P 在 C_1 上，点 Q 在 C_2 上，求 $|PQ|$ 的最小值及此时 P 的直角坐标.

2. 16-2.23 在直角坐标系 xOy 中, 圆 C 的方程为 $(x+6)^2+y^2=25$.
   (I) 以坐标原点为极点, x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系, 求 C 的极坐标方程；
   (II) 直线 l 的参数方程是 $\begin{cases} x=t\cos\alpha, \\ y=t\sin\alpha, \end{cases}$ (t为参数), l 与 C 交于 A,B 两点, $AB=\sqrt{10}$, 求 l 的斜率.

3. 16-1.23 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=1+a\sin t, \end{cases}$ (t为参数, $a>0$). 在以坐标原点为极点, x 轴非负半轴为极轴的极坐标系中, 曲线 $C_2:\rho=4\cos\theta$.
   (I) 说明 C_1 是哪一种曲线, 并将 C_1 的方程化为极坐标方程;
   (II) 直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta=\alpha_0$, 其中 α_0 满足 $\tan\alpha_0=2$, 若曲线 C_1 与 C_2 的公共点都在 C_3 上, 求 a.

4. 15-2.23 在直角坐标系 xOy 中，曲线 $C:\begin{cases} x=t\cos\alpha, \\ y=t\sin\alpha, \end{cases}$ (t 为参数, $t\neq 0$), 其中 $0\leqslant\alpha<\pi$. 在以 O 为极点，x 轴非负半轴为极轴的极坐标系中，曲线 $C_2:\rho=2\sin\theta$, $C_3:\rho=2\sqrt{3}\cos\theta$.
   (I) 求 C_2 与 C_3 交点的直角坐标；
   (II) 若 C_1 与 C_2 相交于点 A, C_1 与 C_3 相交于点 B, 求 $|AB|$ 的最大值.

5. 15-1.23 在直角坐标系 xOy 中，直线 $C_1: x=-2$, 圆 $C_2:(x-1)^2+(y-2)^2=1$, 以坐标原点为极点，x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系.
   (I) 求 C_1,C_2 的极坐标方程；
   (II) 若直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta=\dfrac{\pi}{4}\ (\rho\in\mathbb{R})$, 设 C_2 与 C_3 的交点为 M,N, 求 $\triangle C_2MN$ 的面积.

6. 14-2.23 在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点，x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系，半圆 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta,\theta\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$.
   (I) 求 C 的参数方程；
   (II) 设点 D 在 C 上，C 在 D 处的切线与直线 $l:y=\sqrt{3}x+2$ 垂直，根据 (I) 中你得到的参数方程，确定 D 的坐标.

7. 14-1.23 已知曲线 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$, 直线 $l:\begin{cases} x=2+t, \\ y=2-2t, \end{cases}$ (t为参数).

(I) 写出曲线 C 的参数方程，直线 l 的普通方程；

(II) 过曲线 C 上任意一点 P 作与 l 夹角为 30° 的直线，交 l 于点 A, 求 PA 的最大值与最小值.

8. 13-2.23 已知动点 P, Q 都在曲线 C : $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases}$ (t为参数) 上，对应参数分别为 $t = \alpha$ 与 $t = 2\alpha (0 < \alpha < 2\pi)$, M 为 PQ 的中点.

   (I) 求 M 的轨迹的参数方程；

   (II) 将 M 到坐标原点的距离 d 表示为 α 的函数，并判断 M 的轨迹是否过坐标原点.

9. 13-1.23 已知曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 4 + 5\cos t, \\ y = 5 + 5\sin t, \end{cases}$ (t为参数), 以坐标原点为极点，x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 2\sin\theta$.

   (I) 把 C_1 的参数方程化为极坐标方程；

   (II) 求 C_1 与 C_2 交点的极坐标 ($\rho \geq 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi$).

10. 12.23 已知曲线 C_1 的参数方程是 $\begin{cases} x = 2\cos\varphi, \\ y = 2\sin\varphi, \end{cases}$ (φ为参数), 以坐标原点为极点，x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 2$. 正方形 A, B, C, D 的顶点都在 C_2 上，且 A, B, C, D 以逆时针次序排列，点 A 的极坐标为 $(2, \dfrac{\pi}{3})$.

    (I) 求点 A, B, C, D 的直角坐标；

    (II) 设 P 为 C_1 上任意一点，求 $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2$ 的取值范围.

11. 11.23 在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos\alpha, \\ y = 2 + 2\sin\alpha, \end{cases}$ (α为参数), M 是 C_1 上的动点，P 点满足 $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OM}$, P 点的轨迹为 C_2.

    (I) 求 C_2 的方程；

    (II) 在以 O 为极点，x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系中，射线 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ 与 C_1 的异于极点的交点为 A, 与 C_2 的异于极点的交点为 B, 求 $|AB|$.

12. 10.23 已知直线 C_1 : $\begin{cases} x = 1 + t\cos\alpha, \\ y = t\sin\alpha, \end{cases}$ (t为参数), 圆 C_2 : $\begin{cases} x = \cos\theta, \\ y = \sin\theta, \end{cases}$ (θ为参数).

    (I) 当 $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ 时，求 C_1 与 C_2 的交点坐标；

    (II) 过坐标原点 O 作 C_1 的垂线，垂足为 A, P 为 OA 的中点. 当 α 变化时，求 P 点轨迹的参数方程，并指出它是什么曲线.

9.2 选修 4-5 不等式选讲

9.2.1 ✌ 基础提示

1. 绝对值不等式

   (a) $|x| > (<, \geq \vee \leq) a (a > 0)$. 几何法和平方法

   (b) $||a| + |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$

   (c) $f(x) = |ax + b| \pm |cx + d|$ 性质与对应的不等式 (分段法),

2. 古典不等式证明

   (a) $\cdots \geq \sqrt[n+1]{\dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2}} \geq \sqrt[n]{\dfrac{a^n+b^n}{2}} \geq \cdots \geq \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \geq \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$

   (b) $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geq \dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \geq \dfrac{3}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}$

   (c) 乘“1”法

9.2.2 ☞ 典例剖析

1. 17-3.23 已知函数 $f(x)=|x+1|-|x-2|$.
   (I) 求不等式 $f(x)\geq 1$ 的解集;
   (II) 若不等式 $f(x)\geq x^2-x+m$ 的解集非空, 求 m 的取值范围.

2. 17-2.23 已知 $a>0, b>0, a^3+b^3=2$, 证明:
   (I) $(a+b)(a^5+b^5)\geq 4$;
   (II) $a+b\leq 2$.

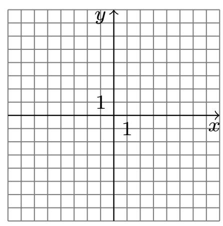
3. 17-1.23 已知函数 $f(x)=-x^2+ax+4, g(x)=|x+1|+|x-1|$.
   (I) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)\geq g(x)$ 的解集;
   (II) 若不等式 $|f(x)|\geq g(x)$ 的解集包含 $[-1,1]$, 求 a 的取值范围.

9.2.3 ✍ 实战演练

1. 16-3.24 已知函数 $f(x)=|2x-a|+a$.
   (I) 当 $a=2$ 时，求不等式 $f(x)\leq 6$ 的解集;
   (II) 设函数 $g(x)=|2x-1|$. 当 $x\in\mathbb{R}$ 时，$f(x)+g(x)\geq 3$, 求 a 的取值范围.

2. 16-2.24 已知函数 $f(x)=|x-\dfrac{1}{2}|+|x+\dfrac{1}{2}|$, M 为不等式 $f(x)<2$ 的解集.
   (I) 求 M；
   (II) 证明: 当 $a,b\in M$ 时, $|a+b|<|1+ab|$.

3. 16-1.24 已知函数 $f(x)=|x+1|-|2x-3|$.
   (I) 画出 $y=f(x)$ 的图像;
   (II) 求不等式 $|f(x)|>1$ 的解集.



4. 15-1.24 已知函数 $f(x)=|x+1|-2|x-a|, a>0$.
   (I) 当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)>1$ 的解集;
   (II) 若 $f(x)$ 的图像与 x 轴围成的三角形面积大于 6，求 a 的取值范围.

5. 14-2.24 设函数 $f(x)=|x+\dfrac{1}{a}|+|x-a|(a>0)$.
   (I) 证明：$f(x)\geqslant 2$；

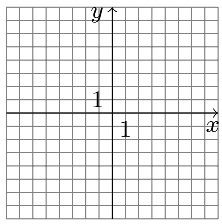
(II) 若 $f(3) < 5$, 求 a 的取值范围.

6. 13-1.24 已知函数 $f(x) = |2x-1| + |2x+a|$, $g(x) = x+3$.
   (I) 当 $a = -2$ 时，求不等式 $f(x) < g(x)$ 的解集；
   (II) 设 $a > -1$, 且当 $x \in [-\frac{a}{2}, \frac{1}{2})$ 时, $f(x) \le g(x)$, 求 a 的取值范围.

7. 12.24 已知函数 $f(x) = |x+a| + |x-2|$.
   (I) 当 $a = -3$ 时，求不等式 $f(x) \ge 3$ 的解集；
   (II) 设 $f(x) \le |x-4|$ 的解集包含 $[1, 2]$, 求 a 的取值范围.

8. 11.24 设函数 $f(x) = |x-a| + 3x$, 其中 $a > 0$.
   (I) 当 $a = 1$ 时，求不等式 $f(x) \ge 3x+2$ 的解集；
   (II) 若不等式 $f(x) \le 0$ 的解集为 $\{x \mid x \le -1\}$, 求 a 的值.

9. 10.24 设函数 $f(x) = |2x-4| + 1$.
   (I) 画出函数 $y = f(x)$ 的图像；
   (II) 若不等式 $f(x) \le ax$ 的解集非空，求 a 的取值范围.



10. 15-2.24 设 a, b, c, d 均为正数，且 $a+b = c+d$. 证明：
   (I) 若 $ab > cd$，则 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$；
   (II) $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$ 是 $|a-b| < |c-d|$ 的充要条件.

11. 14-1.24 若 $a > 0, b > 0$, 且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \sqrt{ab}$.
   (I) 求 $a^3 + b^3$ 的最小值；
   (II) 是否存在 a, b, 使得 $2a + 3b = 6$？并说明理由.

12. 13-2.24 设 $, b, c$ 均为正数，且 $a+b+c = 1$. 证明：
   (I) $ab + bc + ca \le \frac{1}{3}$；
   (II) $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \ge 1$.

附：近四年新课标全国卷文科数学考点归纳及预测

章节	直接考查考点	对应题号									
		17III	17II	17I	16III	16II	16I	15II	15I	14II	14I
集合与逻辑	集合及命题	1	1	1	1	1	1	1	1	1,*3*	1
	推理与证明		9			16					14
复数和算法	复数及运算	2	2	3	2	2	2	2	3	2	3
	算法框图	8	10	10	8	9	10	8	9	8	9
函数与导数	函数基本性质	12	8,14	9	7,*16*	10,*12*	8,*9*	12,13	10,12	15	5,15
	分段函数	16						11	10		15
	函数图像性质	7			*7*	12	9	11,*13*	*12*	*15*	
	切线与斜率			14	16,*21*	*20*	12,*21*	16,*21*	14,*21*	11,*21*	*21*
	与导数综合	21	21	21	21	20	21	21	21	3,21	12,21
平面向量与三角函数	向量及运算	13	4	13	3	13	13	4	2,*20*	4	6
	化简、变换	4		15	6		14				2
	三角函数性质	6	2,13	8	14	3,11	6		8	14	7
	正 (余) 弦定理	15	16	11	9	15	4	17	17	17	16
	三角形面积								17	17	
数列	等差与裂项	17	17	17		17	17	5	7	5	17
	等比与错位		17	17	17			9	13		17
	一般数列	17			17	17	17			16	
不等式	一元二次					*1*					
	线性规划	5	7	7	13	14	16	14	15	9	11
	基本不等式										
立体几何	三视图		6		10	7	7	6	11	6	8
	体积	9,18	6		11,19	19	18	6,19	6	6,7,18	19
	表面积		15	16,18	10	4,7	7	10	11,18		
	垂直	10,18	18	18		19	18		18		19
	平行		18	6	19		11	19		18	
平面解析几何	直线和圆	11,20			15	6	15	7	20	12	20
	抛物线及定义	20	12	20	20	5	20		5	10	10
	椭圆与直线	11	20	12	12	21	5	20	5	20	20
	双曲线	14	5	5				15	16		4
统计与概率	统计与估计	3		2	4,*18*	18	19	3,18	19	19	18
	概率与模拟	18	11,19	4	5	8,18	3,19	18	4	13,19	13,18
	统计案例		19	19	18				19		
选修 4-4	坐标系与参数	22	22	22	23	23	23	23	23	23	23
选修 4-5	绝对值不等式	23		23	24	24	24		24	24	
	古典不等式		23					24			24

注：

1. 本表只统计直接考察考点，间接考察未统计；
2. 从表中可以看出必考点；
3. 个人能力有限，本表仅供参考，如有异议，欢迎指正.

联系方式: iqinxu@163.com 详情: www.qinxu.net